

УДК 539.311:519.642.7

Канд. техн. наук Д. И. Анпилогов

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

ТЕСТИРОВАНИЕ УПРОЩЕННОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРЯМОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе предложена и доведена до численной реализации упрощенная модификация прямого метода граничных элементов при решении плоских задач теории упругости. Упрощение достигается за счет различения ролей узлов и точек коллокации. Произведено сравнение решений задачи о растяжении квадрата, получаемых методами граничных элементов и комплексных потенциалов. Предложенный метод работает стабильнее в точках около границы области.

Ключевые слова: комплексные потенциалы Мухелишвили, граничная задача теории упругости, метод граничных элементов, коллокация.

Введение

В авиадвигателестроении важную роль играет обеспечение и контроль механической прочности конструкций, что возможно на основе решения граничных задач теории упругости. Последнее время ускоренными темпами развивалась техника численного решения таких задач методами конечных и граничных элементов (МКЭ, МГЭ). Появился ряд новых монографий и сборников статей, посвященных МГЭ [1–5]. Однако, МГЭ пока не является лидером в решении названных задач, уступая МКЭ. Во-первых, это следует из динамики количества публикаций [6]. Во-вторых, лидерство МКЭ можно подтвердить, анализируя номенклатуру существующего сегодня программного обеспечения (ПО). Высокой популярностью пользуются коммерческие системы конечно-элементного анализа ANSYS [7–8], Nastran [9] и многие другие [10–11], в том числе с открытым кодом (Open Source). Упоминание о двух десятках таких проектов имеется в обзоре [12]. Напротив, МГЭ-программы представлены в меньшей мере. Это либо узкоспециализированные программы Suit3d, Fault3d [13] (геомеханика), FastBEM Acoustics [14] (акустика) и др., либо гибридные МКЭ-МГЭ программы [15]. Свободного ПО, наподобие [16], и вовсе мало.

Вероятно, одной из причин недостаточной популярности МГЭ является громоздкость формирования матрицы метода. При устремлении текущей внутренней точки области к узлу на границе интегралы уравнений МГЭ становятся сингулярными, причем их предельные значения зависят от внутреннего угла области при этом узле. Можно упростить формирование матрицы МГЭ, различая роли точек коллокации и концов граничного элемента [17]. Принимая в качестве точки коллокации середину граничного элемента (а не его концы), можно избавиться от этой угловой

зависимости. Кроме того, нетиповые вклады в матричные элементы будут возникать за счет одного элемента (а не за счет пары элементов, сопрягаемых в узле). Целью настоящей работы является реализация такого подхода и сравнение решения с результатами, получаемыми методом комплексных потенциалов [18].

Постановка и решение граничной задачи методом комплексных потенциалов

Пусть область S – квадрат в плоскости комплексного переменного z с вершинами в точках $z = \pm \ell \pm i\ell$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) этой области, возникающее под действием сил $\pm F_0$, равномерно распределенных вдоль сторон $\operatorname{Re} z = \pm \ell$, и растягивающих область в направлении оси $\operatorname{Re} z$.

Функция $z = \omega(\zeta)$, конформно отображающая область S на единичный круг $|\zeta| < 1$ в плоскости некоторого комплексного переменного ζ , может быть построена в виде степенного ряда по ζ с использованием интеграла Кристоффеля-Шварца аналогично изложенному в [19]. Тогда комплексные потенциалы ϕ , ψ могут быть найдены из граничного условия Колосова-Мухелишвили [18] ((1), § 51). Правая часть этого условия может быть вычислена с использованием очевидного соотношения:

$$X_n = \frac{f_0}{\ell} \cdot \left[\begin{array}{l} \eta(s) - \eta(s - \ell) - \eta(s - 3\ell) + \\ + \eta(s - 5\ell) + \eta(s - 7\ell) - \eta(s - 8\ell) \end{array} \right], Y_n \equiv 0. \quad (1)$$

Здесь $\eta(s)$ – функция Хевисайда. Тогда поле перемещений может быть найдено из [18] ((5), § 50), а поле напряжений – из [18] ((9), (10), § 32).

Применение метода граничных элементов

Прямой метод граничных элементов решения рассматриваемой задачи является методом поточечной коллокации решения системы интегральных уравнений, известных как тождества Сомильяны для перемещений [20]. При отсутствии объемных сил они имеют вид:

$$u_j^*(\xi^*) + \int_{\Gamma^*} u_i^*(x^*) F_{ij}^*(x^*, \xi^*) d\Gamma^* = \int_{\Gamma^*} t_i^*(x^*) G_{ij}^*(x^*, \xi^*) d\Gamma^*, \quad j=1,2, \quad (2)$$

(подразумевается суммирование по i). Здесь x^* – текущая точка границы Γ^* , ξ^* – произвольная внутренняя точка области, u_i^* – компоненты поля перемещений, t_i^* – компоненты внешней нагрузки. Ядра F_{ij}^* , G_{ij}^* определены в [20]. Символ * соответствует наличию физической размерности.

Для обезразмеривания задачи введем замены переменных $x^* = \ell x$, $\xi^* = \ell \xi$, $u_1^* = U \cdot \frac{f_0}{\mu}$, $u_2^* = V \cdot \frac{f_0}{\mu}$, $t_i^* = t_i \cdot \frac{f_0}{\ell}$. Интересно отметить, что в СИ размерности $[\ell]$ и $[f_0/\mu]$ одинаковы (и обе равны метру), однако характерный размер ℓ области принципиально непригоден для обезразмеривания компонент u_i^* . Эти последние должны быть пропорциональны внешней нагрузке f_0 независимо от геометрии области. Полагая $G_{ij} = \mu G_{ij}^*$, получаем:

$$\begin{cases} U + \int_{\Gamma} (UF_{11} + VF_{21}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (t_1 G_{11} + t_2 G_{21}) d\Gamma; \\ V + \int_{\Gamma} (UF_{12} + VF_{22}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (t_1 G_{12} + t_2 G_{22}) d\Gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Построим дискретизацию системы (3). Граничные элементы ($\Gamma \Delta$) $\Delta \Gamma_k = [x_k, x_{k+1}]$ возникают при выборе системы узлов $x_k \in \Gamma$.

При устремлении внутренней точки области к середине i -го граничного элемента интегралы вдоль этого элемента, содержащие ядра F_{ij} , становятся сингулярными. Поэтому слагаемые $\int_{\Delta \Gamma_k} (UF_{11} + VF_{21}) d\Gamma$, $\int_{\Delta \Gamma_k} (UF_{12} + VF_{22}) d\Gamma$ при $k = i$ следует вычислять нетиповым образом. Их левосторонние предельные значения вычислены в [17]. Соответственно, левые части (3) принимают вид:

$$\begin{cases} zU_i - C_3 C_4 V_i + zU_{i+1} + C_3 C_4 V_{i+1} + \sum_{k \neq i} \int_{\Delta \Gamma_k} (UF_{11} + VF_{21}) d\Gamma; \\ C_3 C_4 U_i + zV_i - C_3 C_4 U_{i+1} + zV_{i+1} + \sum_{k \neq i} \int_{\Delta \Gamma_k} (UF_{12} + VF_{22}) d\Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь обозначено $z = \frac{1}{2} [1 + \pi C_3 (1 + C_4)]$. Константы C_3 , C_4 зависят от свойств материала и заданы в [20] при определении вида ядер F_{ij} . Интегралы под знаком суммы особенностей уже не содержат и могут быть вычислены численно.

Интегралы в правых частях (3) имеют «слабую особенность» (логарифмического характера). Их достаточно понимать как несобственные сходящиеся. Согласно условиям нагружения имеем $t_2 \equiv 0$ на контуре Γ ; $t_1 = \pm 1$ на прямых $x_1 = \pm \ell$; $t_1 \equiv 0$ на прямых $x_2 = \pm \ell$. Нетиповые вклады i -го $\Gamma \Delta$ в интегралы в правых частях (3) принимают вид:

$$\begin{cases} t_1 \int_{\Delta \Gamma} G_{11} d\Gamma = t_1 \frac{C_3 L_i}{2} \left[C_2 \ln \frac{L_i}{2} - \frac{(x_1^{(e)} - (b))}{L_i} - C_2 \right]; \\ t_1 \int_{\Delta \Gamma} G_{12} d\Gamma = -t_1 \frac{C_3}{2L_i} (x_1^{(e)} - (b)) (x_2^{(e)} - (b)). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь L_i – длина i -го $\Gamma \Delta$, а индексы (b) , (e) указывают на его начало и конец (*begin*, *end* соответственно). Обозначено также $C_2 = 3 - 4\nu$, ν – коэффициент Пуассона материала.

Подставляя (4), (5) в (3), получаем систему линейных уравнений. Ее решение – перемещение точек контура. Тогда из (3) находим компоненты U , V перемещения любой внутренней точки ξ . Сингулярность больше не возникает (точка ξ больше не стремится к границе).

Напряжения могут быть найдены из закона Гука:

$$\sigma_{jk}^* = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{jk}$$

(предполагается суммирование по m ; символом *, как и прежде, обозначена физически размерная величина). Относительные деформации могут быть вычислены по формуле Коши:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial \xi_k^*} + \frac{\partial u_k^*}{\partial \xi_j^*} \right) = \frac{f_0}{\mu \ell} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right).$$

Выражая U , V из (3), получаем (суммирование по i)

$$\sigma_{jk}^* = \frac{f_0}{\ell} \int_{\Gamma} [t_i(x) F_{ijk}(x, \xi) - u_i(x) E_{ijk}(x, \xi)] d\Gamma(x).$$

Здесь временно переобозначено $u_1 = U$, $u_2 = V$. Обозначено также (суммирование по m)

$$\begin{cases} T_{ijk} = \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \frac{\partial G_{im}}{\partial \xi_m} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial G_{ik}}{\partial \xi_j}; \\ E_{ijk} = \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \frac{\partial F_{im}}{\partial \xi_m} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_j}. \end{cases}$$

Эти соотношения являются безразмерными аналогами формул (4.40а), (4.40б), предложенных в [20], и отличаются отсутствием коэффициента μ . По нашему мнению, модуль сдвига μ и не должен играть роль носителя размерности в выражениях для напряжений. Такую роль должна играть дробь $\frac{f_0}{\ell}$. Действительно, рассмотрим, например, одноосное растяжение стержня. При выборе другого стержня той же геометрии, но с меньшим модулем сдвига мы получим большее абсолютное удлинение в тех же условиях нагружения. Напряжение же в поперечном сечении остается неизменным (т. к. условия нагружения те же). Иными словами, модуль сдвига влияет на поле перемещений, но не должен влиять на поле напряжений.

Сопоставление результатов

Расчет поля перемещений методом комплексных потенциалов выполнен при удержании $M = 29$ первых слагаемых в разложении функции $\omega(\zeta)$ (из них отличны от нуля 8). На рис. 1 изображены перемещения точек контура, а также точек, расположенных до деформации на луче $\arg z = \pi/4$, $|z| \leq 0,9$ (обозначены квадратиками). Масштаб при отображении перемещений выбран условно большим только для удобства различения исходных и смещенных положений.

Как по перемещенным положениям точек контура, так и по перемещенным положениям точек луча (треугольники) можно судить о том, что имеет место растяжение вдоль оси $\text{Re } z$, сопровождающееся сжатием вдоль оси $\text{Im } z$. Как видим, деформированный луч остается прямолинейным. Это свидетельствует о приемлемом качестве расчетов для точек, находящихся внутри области. Однако, извитость деформированного

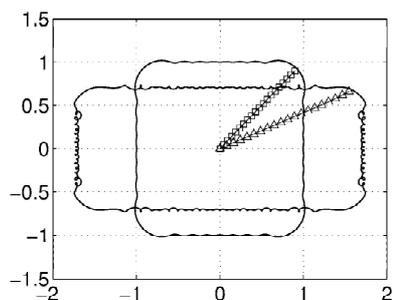


Рис. 1. Перемещения точек на луче $\arg z = \pi/4$ ($M = 29$)

контура указывает на недостаточность количеств удерживаемых слагаемых. Положение частично спасает их увеличение. На рис. 2 показаны аналогичные результаты при удержании $M = 397$ слагаемых (из них 100 отличны от нуля).

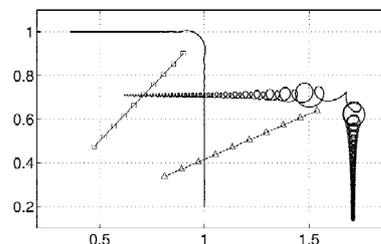


Рис. 2. Перемещения точек на луче $\arg z = \pi/4$ ($M = 397$)

Как видим, перемещения точек около середин сторон контура стабилизируются, однако в окрестности угловых точек контура проблема сохраняется. Кроме того, ухудшается устойчивость решения уравнения $\omega(\zeta) = z^*$, нужного для получения доступа к точке z^* .

Вычислим напряжения в точках отрезка $z_1 z_2$, $\text{Re } z = 0$. Пока точки z далеки от границы, результат ожидаем: безразмерные напряжения $\sigma_{11} \approx 1$, $\sigma_{22} \approx 0$, $\sigma_{12} \approx 0$ в широком диапазоне значений $|z|$. В точках z , близких к границе ($z_1 = 0,98i$, $z_2 = i$), получить сходимость для напряжений вовсе не удастся.

Расчет поля перемещений методом граничных элементов выполнен при использовании 16 ГЭ. На рис. 3 треугольниками и кружочками обозначены положения узлов до и после перемещения соответственно. Мы снова наблюдаем продольное растяжение и поперечное сжатие. Однако, прямолинейность каждого ГЭ сохраняется (это «заложено» в кусочно-линейную модель узловых перемещений).

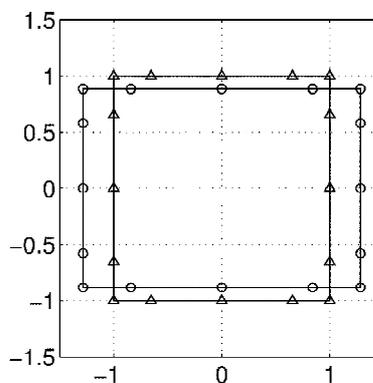


Рис. 3. Перемещения точек контура (результаты прямого МГЭ)

Произведен также расчет распределения напряжений вдоль отрезка $z_1 z_2$. Оказалось возможным выбрать конец этого отрезка в положении $z_2(0; 0,9995)$. При этом отличие напряжения σ_{11} от единицы обнаружить не удастся. Напряжение σ_{22} находится на уровне 10^{-13} (это соответствует абсолютной ошибке, принятой нами в реализации численного интегрирования по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра). Таким образом, прямой метод граничных элементов имеет преимущества перед методом комплексных потенциалов при нахождении напряженно-деформированного состояния в точках, близких к границе области.

Выводы

В настоящей работе предложена и доведена до численной реализации новая модификация прямого метода граничных элементов решения плоских граничных задач теории упругости. Разделение ролей вершин граничных элементов и точек коллокации при дискретизации тождеств Сомильяны для перемещений позволило значительно упростить как вычисления требуемых левосторонних предельных значений некоторых сингулярных интегралов, так и окончательное формирование матрицы метода. Сравнение результатов, получаемых методом комплексных потенциалов Н.И. Мухелишвили и предложенной модификацией прямого метода граничных элементов позволяет утверждать, что эта модификация вполне работоспособна и является предпочтительной при расчете напряженно-деформированного состояния в точках около границы области.

Список литературы

- Beer G. The Boundary Element Method with Programming / Beer G., Smith I., Duenser Ch. — Springer, 2008. — 494 p.
- Fast Boundary Element Methods in Engineering and Industrial Applications [Langer U., Schanz M., Steinbach O., Wendland W.L.]. — Springer, 2012. — 272 p.
- Liu Y. Fast Multipole Boundary Element Method / Liu Y. — Cambridge University Press, 2009. — 254 p.
- Recent Advances in Boundary Element Method // by Editors G.D. Manolis, D. Polyzos // Springer, 2009. — 467 p.
- Stefan A. Sauter Boundary Element Methods / Stefan A. Sauter, Christoph Schwab. — Springer, 2011. — 561 p.
- Providing researchers with access to millions of scientific documents from journals, books, series, protocols and reference works. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://link.springer.com/advanced-search>.
- Системы автоматизации инженерных расчетов. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://www.cadfem-cis.ru/products/ansys/simulation/structural/mechanical/>.
- ANSYS. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://www.ansys.com>.
- Nastran — система конечно-элементного анализа. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://www.nenastran.ru/article/products-neinastran>.
- Интегрированная система прочностного анализа. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://www.ispa-soft.ru/>.
- Программы семейства COSMOS — универсальный инструмент конечно-элементного анализа. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : http://www.cadmaster.ru/magazin/articles/cm_11_cosmos.html.
- Обзор свободных программ для численных расчетов. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : http://s.arboreus.com/2008_03_01_archive.html.
- Зубков В. В. Разработка математических методов моделирования напряженного состояния массива горных пород при отработке удароопасных пластовых месторождений : автореф. дисс. на соискание ученой степени докт. техн. наук : спец. 05.15.11 «Физические процессы горного производства» / Зубков Виктор Васильевич ; Гос. науч.-иссл. ин-т горной геомеханики и маркшейдерского дела. — Санкт-Петербург, 2000. — 54 с.
- FastBEM Acoustics. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://www.fastbem.com/index.html>.
- Experts in Virtual Product Engineering to support Industrial Innovation. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : http://www.esi-group.com/corporate/About_us/.
- The Boundary Element Method. [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://www.boundary-element-method.com/>.
- Анпилогов Д. И. Упрощенная модификация прямого метода граничных элементов / Д. И. Анпилогов // «Математика в современном техническом университете» : мат.-лы междунар. науч. конф., 19–20 апреля 2013 г. — К. : НТУУ «КПИ», 2013. — С. 8–10.

18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н. И. — М. : Наука, 1966. — 707 с.
19. Анпилогов Д. И. Построение конформного отображения кольцевых секторов на единичный круг / Д. И. Анпилогов // Вестник Харьковск. нац. ун-та. Сер. «Математика, прикладная математика и механика». — 2007. — Вып. 57, № 790. — С. 146–157.
20. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — М. : Мир, 1984. — 494 с.

Поступила в редакцию 26.03.2015

Анпілогов Д.І. Тестування спрощеної модифікації прямого методу граничних елементів

В роботі запропоновано і доведено до чисельної реалізації спрощену модифікацію прямого методу граничних елементів при розв'язуванні плоских задач теорії пружності. Спрощення досягається за рахунок розрізнення ролей вузлів і точок колокації. Порівняно розв'язки задачі про розтягування квадрату, отримувани методи граничних елементів і комплексних потенціалів. Запропонований метод працює більш стабільно в точках біля границі області.

Ключові слова: комплексні потенціали Мусхелішвілі, гранична задача теорії пружності, метод граничних елементів, колокація.

Anpilogov D. Testing a simplified modification of the direct boundary element method

A simplified modification of the direct boundary elements method for solving plane elasticity problems and its numerical implementation are presented in this paper. Simplification is achieved by distinguishing the roles of nodes and collocation points. Solutions of the problem of stretching a square, obtained by methods of boundary elements and complex potentials, are compared. The proposed method works more stable at points near the border area.

Key words: Mouschelishvili complex potentials, boundary elasticity problem, finite element method, collocation.