

УДК 539.313

Т. А. Штефан, канд. техн. наук А. В. Засовенко*Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье*

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЭНЕРГИИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ ПРИ АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩИХ НАГРУЗОК

В качестве объекта исследования рассматривается круговой цилиндр конечной высоты, находящийся под действием нагрузок, приложенных к основаниям цилиндра. Целью представленной работы является отыскание критических областей деформированного упругого кругового цилиндра с точки зрения четвертой гипотезы прочности (энергетической гипотезы прочности Мизеса). Предполагается, что цилиндр находится в условиях аксиальной симметрической деформации, вызванной действием на его основания параболических штампов, производящих сжимающую нагрузку.

Ключевые слова: упругий цилиндр, осесимметрическая деформация, энергия формоизменения, многочлены Лежандра.

Введение

В теории упругости считается, что разрушение материала происходит в тех местах конструкции, в которых напряжения превосходят критические значения. Для определения таких зон используются гипотезы прочности, наиболее популярной из которых является четвертая (энергетическая) гипотеза Мизеса [1]. Распределение потенциальной энергии формоизменения, которая используется в этой гипотезе, существенно зависит от геометрии тела, его упругих характеристик и приложенных нагрузок. Представляет интерес разработка численно-аналитического способа решения поставленной задачи для различных классов тел.

Как отмечается в обзоре [2], использование многослойных конструкций из композитов открывает важный резерв прочности и оптимизации конструкций. Конструкции, которые имеют форму слоистого цилиндра, находят широкое применение в авиационной, нефтяной и газовой промышленности. Использование соотношений пространственной теории упругости к изучению таких конструкций позволяет получить более реальную картину напряженно-деформированного состояния. Поскольку в конструировании часто используются цилиндрические элементы, то этим обуславливается актуальность предложенного исследования.

Результаты экспериментальных исследований процесса деформации цилиндрических заготовок штампом изложены в [3]. Теоретическим исследованием деформационной повреждаемости при осесимметричной деформации посвящена работа [4]. В качестве критерия разрушения авторы ис-

пользуют критерий Мизеса. Численное моделирование проведено методом конечных элементов с использованием программы ANSYS. В работе [5] исследуется осадка кругового цилиндра жесткими штампами в условиях установившейся ползучести. Численное решение строится на основе пакета LS-DYNA. Во время расчетов исследователи чаще всего пользуются приближенными методами, например, методом конечных элементов, поэтому получение именно аналитических выражений для функции потенциальной энергии формоизменения является актуальной задачей.

Целью представленной работы является отыскание критических областей деформированного упругого кругового цилиндра конечной высоты с точки зрения четвертой гипотезы прочности. Предполагается, что цилиндр находится в условиях аксиальной симметрической деформации, вызванной действием на его основания параболических нагрузок. В рамках поставленной статической задачи численно исследуется влияние коэффициента Пуассона на поведение функции, описывающей потенциальную энергию формообразования в цилиндре, а также влияние параметров на геометрические характеристики бочкообразности.

Постановка задачи

При решении задачи будем использовать обратный метод Сен-Венана как в [6]. Функция напряжений ищется в виде полинома Лежандра подходящей степени от двух переменных, что дает возможность точно удовлетворить условия на нижней и верхней гранях цилиндра [7].

В качестве деформируемого тела будем рассматривать круговой цилиндр радиуса R и длины h , ось которого совпадает с осью Oz и который находится в условиях осесимметричной деформации. Здесь и далее будем считать, что все величины обезразмерены естественным образом. Будем использовать цилиндрическую систему координат z, r, θ с началом в середине верхнего основания и считаем, что ось Oz направлена вниз. Очевидно, что в этом случае $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ тождественно равны нулю, а остальные компоненты тензора напряжений и вектора перемещений не зависят от угла θ .

Если удалось построить бигармоническую функцию напряжений Эри Φ , то все ненулевые составляющие тензора напряжений и компоненты тензора перемещений определяются по формулам [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right); \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right); \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2\mu u(r, z) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}; \\ 2\mu w(r, z) &= 2(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначено $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Считаем, что на торцах цилиндра равны нулю касательные напряжения, а на боковой поверхности цилиндра нормальные напряжения равны нулю. Кроме этого будем считать, что точки, находящиеся на окружности, ограничивающей среднее поперечное сечение (при $z = h/2$) не перемещаются в вертикальном направлении. Нормальные силы, приложенные к основаниям цилиндра, описываются квадратичной функцией от радиальной координаты. Математическая запись этих условий будет следующая:

$$\begin{aligned} \sigma_z(r; 0) &= -\frac{P_0}{R^2} (R^2 - r^2), \quad \sigma_z(r; h) = -\frac{P_h}{R^2} (R^2 - r^2), \\ \sigma_r(R; z) &= 0, \quad \tau_{rz}(r; 0) \equiv \tau_{rz}(r; h) = 0, \quad w(R; h/2) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь p_0, p_h – максимальная по модулю нагрузка на верхнем и нижнем основаниях. Как отмечалось выше, задача решается полуобратным методом. При этом недостающие граничные условия на боковой грани получаются из условия попадания функции напряжений в заданный класс функций.

Решение задачи

Общее решение сформулированной задачи при произвольных граничных условиях неизвестно. Отдельно строятся приближенные решения для случаев длинного цилиндра, короткого цилиндра и «кубического» цилиндра, у которого диаметр и высота есть величины одного порядка [8].

В тех случаях, когда высота цилиндра существенно меньше диаметра основания (так называемый, короткий цилиндр), и, следовательно, цилиндр приближенно можно считать круглым диском, наиболее существенным является удовлетворение условий на основаниях цилиндра.

Воспользуемся решением для короткого цилиндра, в котором применяются полиномы Лежандра $P_n(x)$. Согласно [1] в этом случае функцию напряжений Эри $\Phi(r, z)$ нужно искать в виде ряда:

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z / \sqrt{r^2 + z^2}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+2} (r^2 + z^2)^{1+n/2} P_n(z / \sqrt{r^2 + z^2}), \end{aligned}$$

где A_n, B_n – произвольные константы. Мы ограничимся рассмотрением конечного числа слагаемых так же, как в [6], то есть выражением:

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \sum_{n=0}^k A_n h^2 (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z / \sqrt{r^2 + z^2}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{k-2} B_{n+2} (r^2 + z^2)^{1+n/2} P_n(z / \sqrt{r^2 + z^2}). \end{aligned}$$

Множитель h^2 в первом слагаемом добавлен для того, чтобы коэффициенты A_n, B_n имели одинаковую размерность (Па). Заметим, что при фиксированном значении параметра k количество произвольных констант A_n, B_n будет равно $(k+1) + (k-1) = 2k$.

Заменим теперь условия (3) дискретным аналогом:

$$\begin{aligned} \sigma_z(0; 0) &= -p_0, \quad \sigma_z(0; h) = -p_h, \\ \sigma_z(R; 0) &= 0, \quad \sigma_z(R; h) = 0, \\ \tau_{rz}(0; h) &= 0, \quad \tau_{rz}(R; h) = 0, \quad \tau_{rz}(0; 0) = 0, \\ \tau_{rz}(R; 0) &= 0, \quad w(R; h/2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что при значении индекса $k=6$ сформулированные дискретные условия (4) будут эквивалентны непрерывным условиям (3).

Функция $\varphi(r, z)$ в таком случае будет содержать 12 констант $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ и B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 . При использовании формул (1) и (2) константы A_0 и A_1 исчезают, а константы A_2 и B_2 входят только в выражение для функции перемещений $w(r, z)$ в виде линейной комбинации. Таким образом, получаем 9 независимых констант, для нахождения которых необходима система из девяти уравнений. В таблице 1 приведены полиномы Лежандра

$\tilde{P}_n = (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2})$ и их производные, необходимые для составления системы (3), соответствующие выбранному значению параметра n . В таблице 2 записаны значения полиномов Лежандра вида $\tilde{\tilde{P}}_n = (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2})$, а

также соответствующие частные производные и оператор Лапласа.

Используя данные таблиц 1 и 2 можно показать, что нормальные $\sigma_z(r; z)$ и касательные на-

пряжения $\tau_{rz}(r; z)$ представляются в виде квадратичных функций полярной координаты r :

$$\sigma_z(r; z) = \tilde{a}(z) + \tilde{b}(z) \cdot r^2, \tau_{rz}(r; z) = \tilde{c}(z) + \tilde{d}(z) \cdot r^2. \quad (5)$$

Если нормальное напряжение $\sigma_z(r; z)$, записанное в форме (3) совпадает со значением $\sigma_z(r; z)$, записанным в виде (5), при значениях параметров $z=0, r=0$ и при $z=0, r=R$, то это означает, что оба эти представления совпадают при любых значениях r для $z=0$. Аналогичные рассуждения справедливы и для касательных напряжений $\tau_{rz}(r; z)$. Таким образом, показана эквивалентность дискретных и непрерывных условий.

С учетом того, что компоненты $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ тождественно равны нулю, запишем функцию энергии формоизменения в полярных координатах:

$$\sigma^{IV} = F(r, \theta, z) = \sqrt{(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_r \sigma_z + \sigma_\theta \sigma_z - \tau_{rz}^2)}. \quad (6)$$

Определив явно компоненты тензора деформаций согласно (1) с учетом граничных условий (3), перейдем к численному исследованию функции потенциальной энергии формоизменения.

Таблица 1 – Полиномы Лежандра вида $\tilde{P}_n = (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2})$

n	\tilde{P}_n	$\frac{\partial^2 \tilde{P}_n}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \tilde{P}_n$
1	z	0	0
2	$-0,5r^2 + z^2$	2	0
3	$-0,5z(-2z^2 + 3r^2)$	$6z$	0
4	$0,375r^4 - 3r^2z^2 + z^4$	$-6r^2 + 12z^2$	0
5	$0,125z(15r^4 - 40r^2z^2 + 8z^4)$	$-20z^3 - 30r^2z$	0
6	$-0,3125r^6 + 5,625r^4z^2 - 7,5r^2z^4 + z^6$	$22,5r^4 - 90r^2z^2 + 30z^4$	0

Таблица 2 – Полиномы Лежандра вида $\tilde{\tilde{P}}_n = (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2})$

n	$\tilde{\tilde{P}}_n$	$\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{P}}_n}{\partial z^2}$	$\nabla^2 \tilde{\tilde{P}}_n$
1	$z(r^2 + z^2)$	$6z$	$10z$
2	$-0,5(r^2 - 2z^2)(r^2 + z^2)$		$-7r^2 + 14z^2$
3	$-0,5z(-2z^2 + 3r^2)(r^2 + z^2)$	$-3r^2z + 20z^3$	$-27r^2z + 18z^3$
4	$0,125(3r^4 - 24r^2z^2 + 8z^4)(r^2 + z^2)$	$-5,25r^4 - 24r^2z^2 + 30z^4$	$8,25r^4 - 66r^2z^2 + 22z^4$

Исследование функции энергии формоизменения

Значения параметров примем равными $R=1$, $h=1$, $\nu=0,3$ (то есть рассмотрим цилиндр, у которого радиус основания совпадает с высотой). Будем рассматривать случаи симметричной ($p_0 = p_h$) и несимметричной ($p_0 \neq p_h$) нагрузок. Величина $p_0 = 0,1$.

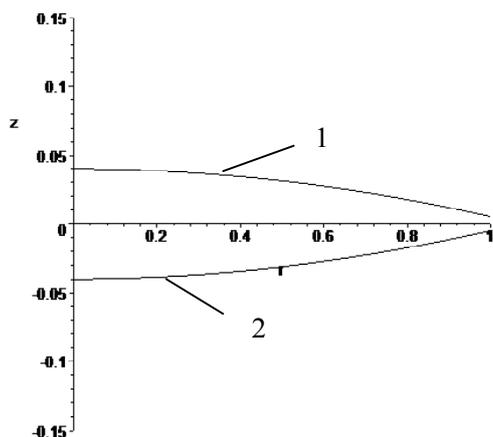


Рис. 1. Вертикальные перемещения при $p_0 = p_h$ точек: 1 – верхнего основания, 2 – нижнего основания

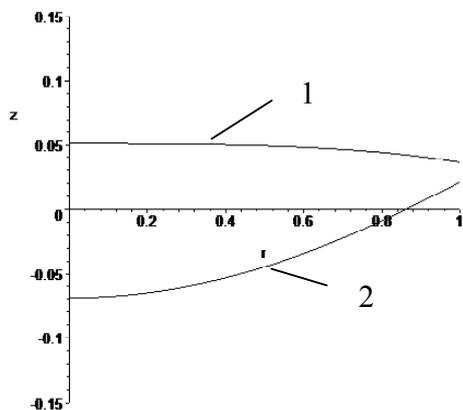


Рис. 2. Вертикальные перемещения при $p_h = 2p_0$ точек: 1 – верхнего основания, 2 – нижнего основания

На рисунках 1 и 2 изображены графики функций вертикальных перемещений точек верхнего и нижнего оснований при симметричной и несимметричной нагрузках на эти основания. Как видим, вертикальные перемещения оказались симметричными при одинаковых нагрузках и несимметричными при несимметричных нагрузках, что соответствует физическому смыслу задачи.

Перейдем к исследованию напряжений на боковой грани цилиндра. На рисунках 3 и 4 представлены графики функций нормального $\sigma_r(l; z)$ и касательного $\tau_{rz}(l; z)$ напряжений в точках боковой грани при симметричной ($p_0 = p_h$) и не симметричной ($p_h = 2p_0$) нагрузках на основания цилиндра.

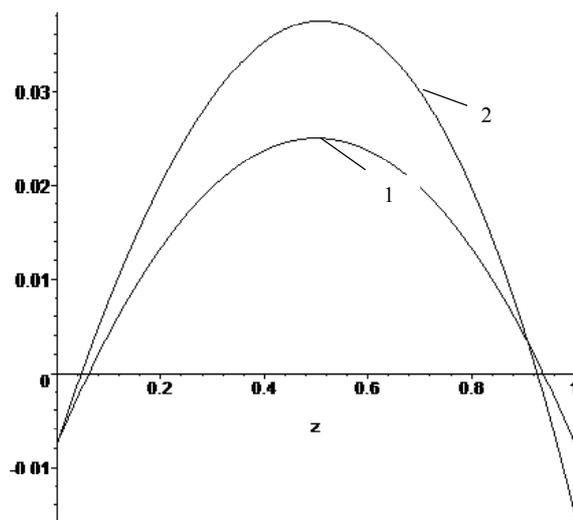


Рис. 3. Нормальное напряжение $\sigma_r(l; z)$ на боковой грани при: 1 – $p_0 = p_h$, 2 – $p_h = 2p_0$

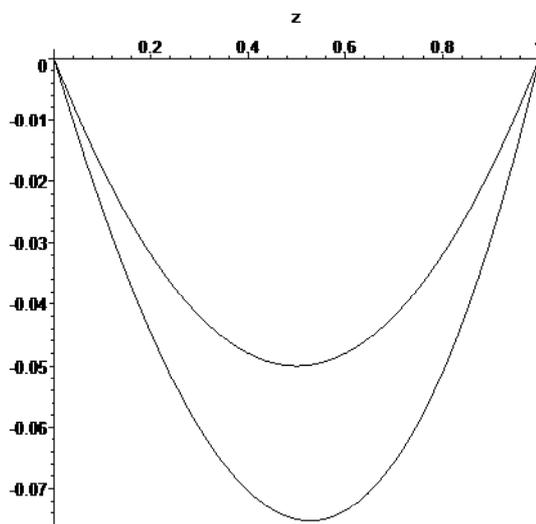


Рис. 4. Касательное напряжение $\tau_{rz}(l; z)$ на боковой грани при: 1 – $p_0 = p_h$, 2 – $p_h = 2p_0$

Если записать аналитические выражения для касательных и нормальных напряжений соответственно в случаях симметричной нагрузки:

$$\begin{aligned} \sigma_r(1; z) &= -0,0075 + 0,13 \cdot z - 0,13 \cdot z^2, \\ \tau_{rz}(1; z) &= -0,2 \cdot z + 0,2 \cdot z^2 \end{aligned} \quad (7)$$

и несимметричной нагрузки в явном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r(1; z) &= -0,0075 + 0,1658 \cdot z - 0,13 \cdot z^2 + 0,07 \cdot z^3, \\ \tau_{rz}(1; z) &= -0,27 \cdot z + 0,2 \cdot z^2 + 0,07 \cdot z^3, \end{aligned} \quad (8)$$

тогда в совокупности условия (4), (7) или (4), (8) дадут полную формулировку соответствующей граничной задачи теории упругости.

На рисунке 5 изображены графики функции потенциальной энергии формоизменения $F(r, z)$ в случае одинаковой по модулю нагрузки и при $p_h = 2p_0$.

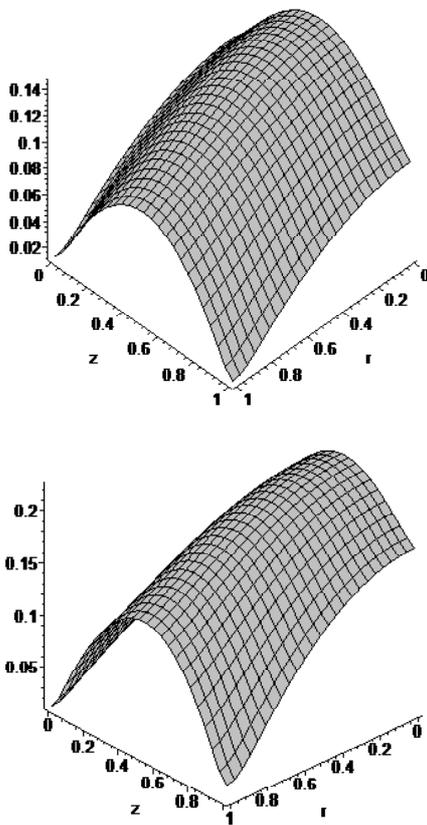


Рис. 5. Функция $F(r, z)$ при нагрузках $p_0 = p_h$ и $p_h = 2p_0$

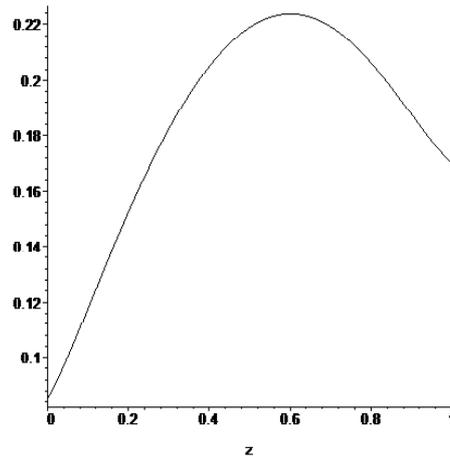


Рис. 6. $F(0, z)$ при $p_h = 2p_0$

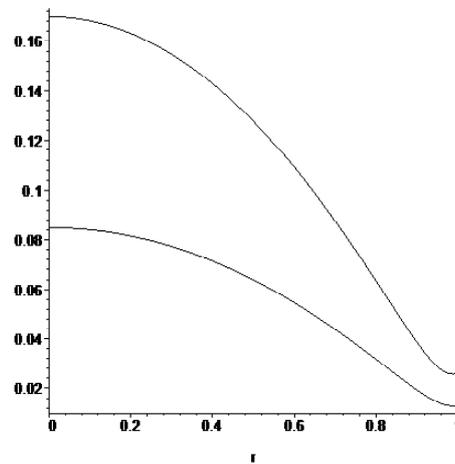


Рис. 7. 1 – $F(r, 0)$, 2 – $F(r, 1)$ при $p_h = 2p_0$

Для удобства на графиках 6 и 7 приведены сечения двумерного графика функции плоскостями $r = 0$ и $z = 0, z = 1$ в случае несимметричной нагрузки при $p_h = 2p_0$.

Как и следовало ожидать, функция потенциальной энергии формоизменения при симметричной нагрузке на основания цилиндра также распределяется симметрично.

В таблице 3 приведены точки и значения глобального максимума функции потенциальной энергии формоизменения при фиксированной нагрузке p_0 на верхнее основание и пропорциональном увеличении нагрузки на нижнее основание $p_h = s \cdot p_0$.

Таблица 3 – Точки и значения глобального максимума функции

$s = p_h/p_0$	1	2	3	4
h_{\max}	0,5	0,601	0,651	0,682
F_{\max}	0,146	0,224	0,306	0,391

Итак, если зафиксировать нагрузку на одном из оснований цилиндра и увеличивать ее на другом основании, то значение глобального максимума функции потенциальной энергии будет расти, и этот рост не будет линейным.

Выводы

В данной работе предложен способ нахождения в цилиндре, который сдавливается с двух сторон, точек, наиболее опасных с точки зрения прочности.

Получены аналитические выражения для компонент вектора перемещений и тензора напряжений короткого цилиндра, к основаниям которого приложены нагрузки (симметричные и несимметричные). В качестве функции Эри взята сумма, являющаяся частью ряда, дающего приближенное решение для короткого цилиндра.

Показано, что как в случае симметричной, так и несимметричной нагрузки точка глобального максимума функции потенциальной энергии формоизменения находится на оси цилиндра. При этом в случае симметричной нагрузки точка максимума находится в середине высоты цилиндра. При пропорциональном увеличении нагрузки на одно из оснований, точка экстремума смещается вдоль оси ближе к тому торцу цилиндра, к которому приложена большая нагрузка.

Список литературы

1. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / Власов В. З. — М. : ГИФМЛ, 1960. — 490 с.
2. Александров А. С. Обзор применения критериев прочности и условий пластичности в до-

рожных конструкциях и грунтовых основаниях / Александров А. С., Александрова Н. П. // Совершенствование технологий строительства и ремонта дорог для условий Сибири : сб. науч. тр. — Омск : Изд-во, 2010. — С. 65–86.

3. Кухарь В. В. Макропоказатели формоизменения и работа деформации при осадке заготовок выпуклыми плитами / Кухарь В. В. // Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія «Машинобудування». — К. : Вип. №64, 2012. — С. 227–233.
4. Тутышкин Н. Д. Моделирование деформационной повреждаемости материалов при осесимметричной осадке / Тутышкин Н. Д., Куанг Х. Х. // Известия ТулГУ. Естественные науки. — Тула : Вип. №1, 2011. — С. 129–137.
5. Локощенко А. М. Исследование осадки круговых цилиндров при ползучести с учетом и без учета бочкообразования / Локощенко А. М., Моссаковский П. А., Терауд В. В. // Вычислительная механика сплошных сред. — 2010. — Т. 3, №1. — С. 52–62.
6. Штефан Т. А. Энергия формоизменения в коротком цилиндре при аксиальной симметрической деформации / Т. А. Штефан, Е. В. Величко / Штефан Т. А., Величко Е. В. // Деформация и разрушение материалов. — М. : «Наука и технологии». — 2014. — №(6). — С. 12–18.
7. Ляв А. Математическая теория упругости / Ляв А. — М. : ОНТИ НКТП СССР, 1935. — 675 с.
8. Лурье А. И. Теория упругости / Лурье А. И. — М. : ГИФМЛ, 1970. — 940 с.

Поступила в редакцию 29.11.2016

Штефан Т. О., Засовенко А.В. Дослідження функції енергії формозмінення в циліндрі при аксіальній симетричній деформації під дією стискаючих навантажень

Як об'єкт дослідження розглядається круговий циліндр кінцевої висоти, що знаходиться під дією навантажень, прикладених до основи циліндра. Метою представленої роботи є знаходження критичних областей деформованого пружного кругового циліндру з точки зору четвертої гіпотези міцності (енергетичної гіпотези міцності Мізеса). Передбачається, що циліндр знаходиться в умовах аксіальної симетричної деформації, яка викликана дією на його основу параболічних штампів, що виробляють стискуюче навантаження.

Ключові слова: пружний циліндр, вісесиметрична деформація, енергія формозмінення, многочлени Лежандра.

Shtefan T., Zasovenko A. Research function of energy forming cylinder for axial symmetric deformation under compressive loads

As the object of study is considered a circular cylinder of finite height, is under the influence of the loads applied to the base of the cylinder. The aim of the present work is to find the critical areas of the elastic deformation of a circular cylinder in terms of the strength of the fourth hypothesis (Mises's energy hypothesis of strength). It is assumed that the cylinder is symmetrical in terms of axial deformation caused by the action of base on its parabolic stamps, generating a compressive load.

Key words: elastic cylinder, axisymmetric deformation, forming energy, Legendre polynomials.