

УДК 539.3 : 543.1

- Мастиновский Ю. В.** канд. техн. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина, e-mail: ymastinovsky@gmail.com;
- Анпилогов Д. И.** канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Запорожского национального технического университета, Запорожье, Украина, e-mail: anpilogov@ua.fm

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЯХ

**Цель работы.** Разработка упрощённой математической модели и методики расчёта для инженерной практики, которые позволяют на стадии создания и доводки давать предварительную оценку прочности и устойчивости слоистых конструкций при действии на них нагрузок ударного типа. Анализ возможности применения стержневых теорий для исследования переходных процессов в элементах вязко-упругих конструкций.

**Методы исследования.** Для описания движения составляющих слоистых конструкций используются уточнённые (неклассические) стержневые модели. В этих моделях учтены некоторые дополнительные факторы, влияющие на распространение волн напряжений. Принимается, что в области контакта стержней действует сила, пропорциональная относительному перемещению элементов конструкции, и сила трения, пропорциональная относительной скорости перемещения частиц срединных линий стержней. Задача о торцевом ударе по составному (двухслойному) стержню решается аналитически с использованием методов разделения переменных и разложений в ряды Фурье.

**Полученные результаты.** С помощью замены переменных и метода разделения искомым функций сформулированы две краевые задачи для волнового и телеграфного уравнений, приводимых к безразмерному виду. Задан закон изменения по времени импульсного воздействия, моделирующий действие импульса продольной силы на границе конструкции. Получены расчётные формулы для вычисления значений обобщённых перемещений в каждом из составляющих конструкции, и изменений объёмной плотности потенциальной энергии упругой деформации в двухслойном стержне. Приводятся графики и проводится анализ изменения энергии деформации в двухслойном стержне, составленном из различных материалов при заданном воздействии на границе.

**Научная новизна.** На основе использования уточнённой стержневой модели двухслойной вязко-упругой конструкции разработана методика и получены формулы для расчёта продольных движений её составляющих и изменения энергии деформации вдоль конструкции, вызванных нестационарной торцевой нагрузкой.

**Практическая ценность.** Вязко-упругие слоистые конструкции широко применяются в современной технике. Исследование качественных закономерностей движения составляющих конструкции используется при оценке прочности контакта и устойчивости при действии различных нагрузок. Разработанная методика расчёта и полученные формулы для нахождения перемещений каждого слоя и изменения энергии деформации всей конструкции, основанные на использовании уточнённой модели движения двухслойного вязко-упругого стержня, представляют интерес для инженерной практики.

**Ключевые слова:** слоистая конструкция; стержневая модель; вязко-упругое взаимодействие; энергия деформации; волны напряжений.

### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к вопросам вязко-упругого деформирования слоистых тел объясняется широким применением в современной технике и строительстве сооружений различных составных конструкций из металлов, полимеров, пластиков и резиноподобных материалов, обладающих этими свойствами. Металлы и их сплавы, не обнаруживающие свойства вязкости при воздействии на них внешних сил умеренной интенсивности, при действии нестационарных нагрузок большой интенсивности (например, падение взрывной удар-

ной волны на поверхность металла) проявляют заметные временные эффекты [1]–[3].

### 1 АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

В работе [1] приведен краткий анализ различных моделей, описывающих продольные колебания составных конструкций. Проведён анализ дисперсионных и диссипативных свойств волн в составном стержне, движения которого описываются уточнёнными уравнениями Миндлина–Германа. Показано, что такая модель может быть ис-

пользована для исследования динамических процессов в слоистых вязко-упругих элементах конструкций.

## 2 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Создание математической модели и методики расчёта для исследования качественных и количественных характеристик движения многослойных вязко-упругих конструкций является актуальной задачей для оценки их прочности при действии различных нагрузок.

## 3 ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**3.1 Модель двухслойной конструкции. Постановка задачи.** Ограничимся рассмотрением одномерной модели, представляющей собой два параллельно соединённых стержня, которые при взаимодействии проявляют линейно-вязко-упругие свойства. Рассмотрим распространение волн в таком композитном стержне при действии на его левый конец ( $x=0$ ) в начальный момент времени ( $t=0$ ) продольного импульса кинематического или силового происхождения. Правый конец составного стержня ( $x=L$ ) будем считать свободным.

Используя одно из простейших видоизменений закона Гука, учитывающее вязкие свойства среды, данное Максвеллом [2]–[4], движение двухслойного стержня зададим системой уравнений:

$$E_i S_i u_i'' = \rho_i S_i \ddot{u}_i + (-1)^i F, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь  $u_i(x, t)$  – продольные перемещения стержней, штрихи означают частные производные по координате, а точки – частные производные по времени;  $E_i$ ,  $S_i$ ,  $\rho_i$  – модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности материалов соответственно:

$$F = R_1(u_2 - u_1) + R_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1). \quad (2)$$

В процессе действия на рассматриваемую конструкцию торцевой нагрузки между её элементами возникает контактное давление  $F(x, t)$ , которое учитывает два физических механизма взаимодействия стержней (2). Слагаемое  $R_1(u_2 - u_1)$  согласно закону Гука пропорционально относительному смещению стержней, а слагаемое  $R_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$  пропорционально относительной скорости их движения и определяет силу сопротивления, ответственную за диссипацию энергии. Коэффициенты  $R_1$  и  $R_2$  характеризуют силы упругого и вязкого взаимодействия стержней.

Систему уравнений (1) дополняем начальными и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче. Начальные условия описывают отсутствие смещений  $u_i$  всех точек стержней из положений равновесия и равенство нулю их начальных скоростей  $\dot{u}_i$ :

$$u_i = \dot{u}_i = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t = 0. \quad (3)$$

Граничные условия налагаются на относительные деформации  $u_i'$  в граничных сечениях  $x=0$  и  $x=L$  в произвольный момент времени  $t > 0$ . Эти деформации пропорциональны соответствующим напряжениям, причём напряжение обусловлено действием внешней силы на левом конце стержня и равно нулю на правом (свободном) конце. Поэтому граничные условия при  $t > 0$  принимаются в виде:

$$\begin{cases} u_i' = \frac{F_0}{E_i(S_1 + S_2)} \cdot f(t), & x = 0; \\ u_i' = 0, & x = L. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $F_0$  – коэффициент, определяющий амплитуду заданной деформации в сечении  $x=0$ ,  $f(t)$  – заданный закон изменения нагрузки при  $t \geq 0$ . Условия (4) предполагают, что напряжения в нагружаемом сечении ( $x=0$ ) в обоих стержнях одинаковы, а деформации могут быть различны за счёт различия модулей упругости.

**3.2 Преобразование системы определяющих уравнений.** С целью разделения искомых функций введём новые переменные  $v_i$  по формулам:

$$u_i = v_1 - (-1)^i v_2, \quad \text{т. е.}$$

$$v_i = v_i(x, t) = \frac{1}{2}(u_1 - (-1)^i u_2), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} E_i S_i (v_1'' - (-1)^i v_2'') = \\ = \rho_i S_i (\ddot{v}_1 - (-1)^i \ddot{v}_2) - (-1)^i \cdot 2(R_1 v_2 + R_2 \dot{v}_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Введём новые независимые переменные, полагая:

$$x(\xi, \tau) = \alpha \xi, \quad t(\xi, \tau) = \beta \tau.$$

Тогда поля продольных перемещений:

$$w_i(\xi, \tau) = v_i(x(\xi, \tau), t(\xi, \tau)). \quad (7)$$

Здесь  $\xi$ ,  $\tau$  – безразмерные координата и время,  $\alpha$  и  $\beta$  – неизвестные параметры, подлежа-

щие определению. Дифференцируя (7), находим:

$$v'_i = \frac{1}{\alpha} w'_i, v''_i = \frac{1}{\alpha^2} w''_i, \dot{v}_i = \frac{1}{\beta} \dot{w}_i, \ddot{v}_i = \frac{1}{\beta^2} \ddot{w}_i. \quad (8)$$

Здесь штрихи и точки при неизвестных функциях  $w_i$  означают частные производные по  $\xi$  и  $\tau$  соответственно. Система уравнений (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{E_i S_i}{\alpha^2} (w''_1 - (-1)^i w''_2) = \\ = \frac{\rho_i S_i}{\beta^2} (\dot{w}_1 - (-1)^i \dot{w}_2) - (-1)^i \cdot 2 \left( R_1 w_2 + \frac{R_2}{\beta} \dot{w}_2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Вычитая теперь из первого уравнения ( $i = 1$ ) системы (9) второе ( $i = 2$ ) и полагая  $\alpha^2 = \kappa \beta^2$ ,

где  $\kappa = \frac{E_1 S_1 - E_2 S_2}{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2} > 0$ , получаем два уравнения:

$$w''_1 - \ddot{w}_1 = 0, \quad (10)$$

$$w''_2 = A \left( \frac{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}{4\beta^2 R_1} \ddot{w}_2 + w_2 + \frac{\Delta}{\beta} \dot{w}_2 \right). \quad (11)$$

Здесь  $A = \frac{4\kappa\beta^2 R_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2}$ ,  $\Delta = \frac{R_2}{R_1}$  — коэффициент диссипации [1]. Если положить  $A = 1$ , то получаем  $\beta = \left( \frac{E_1 S_1 + E_2 S_2}{4\kappa R_1} \right)^{1/2}$ , и уравнение (11) принимает вид

$$w''_2 = r \ddot{w}_2 + w_2 + \delta \dot{w}_2, \quad (12)$$

где  $r = \kappa n$ ,  $n = \frac{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2}$ ,  $\delta = \frac{\Delta}{\beta}$ . Уравнение (12) известно под названием телеграфного [5].

К уравнениям (10) и (12) следует присоединить начальные и граничные условия (3) и (4), которые с учётом преобразований (5) и (7) принимают вид:

$$\text{при } \tau = 0: w_i = \dot{w}_i = 0, \quad 0 \leq \xi \leq b; \quad (13)$$

при  $\tau > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} w'_i &= \frac{\alpha F_0}{2(S_1 + S_2)} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) f(\beta\tau), \quad \xi = 0; \\ w'_i &= 0, \quad \xi = b. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь  $b = \frac{L}{\alpha}$ .

### 3.3 Пример расчёта двухслойной конструкции.

Пусть на границе конструкции ( $x = 0$ ) задана сила, изменяющаяся по закону  $F(t) = F_0 f(t)$ . С целью изучения распространения нестационарных волн импульсный характер силового воздействия моделируем заданием функции  $f(t)$  в виде:

$$f(t) = \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

где  $T$  — заданная константа ( $\max_{t \geq 0} f(t) = f(T) = e^{-1}$ ).

При росте аргумента эта функция экспоненциально убывает, асимптотически стремясь к нулю. Легко видеть, что уже при  $t > 3T$  её значения достаточно малы ( $f(3T)/f(T) \approx 0,4$ ). Оценим, насколько величина  $T$  должна быть малой, чтобы нагрузка носила импульсный характер (характер однократного удара). Требуется, чтобы при  $t = 3T$  продольные волны, распространяясь по составному стержню со скоростями  $c_i = (E_i/\rho_i)^{1/2}$ ,  $i = 1, 2$ , преодолели расстояние, малое сравнительно с длиной стержня:  $\max\{c_i\} \cdot 3T \leq L$ , отсюда

$$T \ll \frac{L}{3 \max\{c_i\}}.$$

Функция  $f(\beta\tau)$  в условиях (14) принимает вид:

$$f(\beta\tau) = \frac{\beta}{T} \varphi(\tau),$$

где

$$\varphi(\tau) = \tau e^{-\frac{\beta\tau}{T}}.$$

Таким образом, получаем две задачи:

$$\text{I} \quad \begin{cases} U'' - \ddot{U} = 0, \\ \tau = 0: U = \dot{U} = 0, \quad \xi \in [0, b]; \\ \tau > 0: U' = (1+z)\varphi(\tau), \quad \xi = 0; \\ U' = 0, \quad \xi = b, \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} V'' = r\ddot{V} + \delta\dot{V} + V, \\ \tau = 0: V = \dot{V} = 0, \quad \xi \in [0, b]; \\ \tau > 0: V' = (1+z)\varphi(\tau), \quad \xi = 0; \\ V' = 0, \quad \xi = b. \end{cases}$$

Здесь  $U(\xi, \tau)$  и  $V(\xi, \tau)$  – безразмерные перемещения. Связь безразмерных и размерных величин осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \alpha\xi, & t &= \beta\tau, & L &= \alpha b, \\ u_1 &= M(U+V), & u_2 &= M(U-V), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$M = \frac{\alpha F_0}{2E_1(S_1 + S_2)} \cdot \frac{\beta}{T}, \quad z = \frac{E_1}{E_2}.$$

Решение задачи для  $U$  (краевой задачи I для волнового уравнения) ищем в виде [4], [6]–[7]

$$U(\xi, \tau) = U_1(\xi, \tau) + U_2(\xi, \tau).$$

Подберём функцию  $U_2$  так, чтобы граничные условия для функции  $U_1$  стали однородными. Пусть

$$U = U_1 - \frac{1+z}{2b}(b-\xi)^2 \varphi(\tau), \quad (16)$$

тогда для  $U_1$  получаем задачу:

$$\begin{cases} U_1'' = \ddot{U}_1 + \Phi, \\ \tau = 0: & U_1 = 0, \dot{U}_1 = \frac{1+z}{2b}(b-\xi)^2, \quad \xi \in [0, b]; \\ \tau > 0: & U_1' = 0, \quad \xi = 0; \\ & U_1' = 0, \quad \xi = b. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь

$$\Phi(\xi, \tau) = \ddot{U}_2 - U_2'' = \frac{1+z}{2b} \left[ 2\varphi(\tau) - (b-\xi)^2 \varphi''(\tau) \right].$$

Решение задачи (17) ищем в виде ряда Фурье по косинусам:

$$U_1(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) \cos \frac{\pi n \xi}{b}. \quad (18)$$

Подставляя разложение (18) в (17), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения и дополнительные соотношения для определения коэффициентов  $a_n(\tau)$ . После преобразований находим:

$$\begin{cases} a_0(\tau) = \frac{1+z}{b} \left[ \left( \frac{b^2 \tau}{6} - \tau_0^2 \tau - 2\tau_0^3 \right) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} - \tau_0^2 \tau + 2\tau_0^3 \right], \\ a_n(\tau) = A_n \cos \frac{\pi n \tau}{b} + B_n \sin \frac{\pi n \tau}{b} + (p_n \tau + \eta_n) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\mu}{q_n^2}, \quad B_n = \frac{\mu(q_n - 2b^2)}{2\pi n b \tau_0 \cdot q_n^2}, \quad \tau_0 = \frac{T}{\beta}, \quad \mu = 4b^3 \tau_0^3 (1+z), \\ q_n &= b^2 + \pi^2 n^2 \tau_0^2, \quad p_n = \frac{\mu}{2\pi^2 n^2 \tau_0^3 q_n}, \quad \eta_n = -\frac{\mu}{q_n^2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные по формулам (19) коэффициенты Фурье  $a_n(\tau)$  в ряд (18), находим решение задачи I для функции  $U(\xi, \tau)$  по формулам (16), где  $\varphi(\tau) = \tau e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$ .

Решение задачи для  $V$  (краевой задачи II для телеграфного уравнения) будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = W(\xi, \tau) e^{-\gamma \tau}. \quad (20)$$

С целью исключения производной  $\dot{W}$  положим  $\gamma = \frac{\delta}{2r}$ . Тогда краевая задача для функции  $W$  принимает вид:

$$\begin{cases} W'' = r\ddot{W} + \left(1 - \frac{\delta^2}{4r}\right)W, \\ \tau = 0: & W = \dot{W} = 0, \quad \xi \in [0, b]; \\ \tau > 0: & W' = \psi(\tau), \quad \xi = 0; \\ & W' = 0, \quad \xi = b. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь

$$\psi(\tau) = (1-z)e^{\gamma \tau} \cdot \varphi(\tau) = (1-z)\tau e^{-\frac{\tau}{\tau_1}},$$

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{1-\gamma \tau_0} = \frac{\tau_0}{1-\frac{\delta}{2r} \tau_0}.$$

Уравнение (21) известно как уравнение Клейна-Гордона [5]. Как и в случае решения задачи для  $U$ , полагаем

$$\begin{aligned} W(\xi, \tau) &= W_1(\xi, \tau) + W_2(\xi, \tau) = \\ &= W_1(\xi, \tau) - \frac{1}{2b}(b-\xi)^2 \psi(\tau), \end{aligned} \quad (22)$$

что приводит к краевой задаче с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} W_1'' = r\ddot{W}_1 + \left(1 - \frac{\delta^2}{4r}\right)W_1 + \Theta, \\ \tau = 0: & W_1 = 0, \dot{W}_1 = \frac{z-1}{2b}(b-\xi)^2, \quad \xi \in [0, b]; \\ \tau > 0: & W_1' = 0, \quad \xi = 0; \\ & W_1' = 0, \quad \xi = b. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь

$$\Theta(\xi, \tau) = \frac{1}{2b} \left[ 2\psi(\tau) - (b - \xi)^2 \left( \left( 1 - \frac{\delta^2}{4r} \right) \psi(\tau) + r\psi''(\tau) \right) \right].$$

Решение задачи (23) ищем в виде ряда:

$$W_1(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) \cos \frac{\pi n \xi}{b}. \quad (24)$$

Используя уже полученные разложения и приравнявая коэффициенты Фурье при косинусах, получаем задачу Коши для определения  $c_n(\tau)$ . После преобразований находим:

$$c_0(\tau) = \frac{1}{\omega_0} \left[ \frac{(z-1)b}{6} + \frac{g_0}{\tau_1} - f_0 \right] \sin \omega_0 \tau - g_0 \cos \omega_0 \tau + (f_0 \tau + g_0) e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}, \quad (25)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\delta^2}{4r} \right), \quad g_0 = \frac{2(z-1)\tau_1}{brk_0}, \quad k_0 = 1 + (\omega_0 \tau_1)^2,$$

$$f_0 = \frac{(1-z)h_0\tau_1^2}{k_0}, \quad h_0 = \frac{bk_0}{6\tau_1^2} - \frac{1}{br};$$

$$c_n(\tau) = S_n \cos \omega_n \tau + D_n \sin \omega_n \tau + (f_n \tau + g_n) e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}, \quad (26)$$

где

$$S_n = -g_n, \quad g_n = \frac{2\tau_1 \mu_n}{k_n} \left( \frac{k_0}{k_n} + 1 \right), \quad \mu_n = (1-z) \frac{2b}{n^2 \pi^2},$$

$$k_n = 1 + (\omega_n \tau_1)^2, \quad f_n = \mu_n \frac{k_0}{k_n}, \quad \omega_n^2 = \omega_0^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2 r},$$

$$D_n = \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{g_n}{\tau_1} - f_n - \mu_n \right).$$

Решение задачи для  $V$  находим по формуле (20) с использованием формулы (22) и разложения (24).

**3.4 Вычисление энергии деформации.** Результаты расчётов перемещений  $U(\xi, \tau)$  и  $V(\xi, \tau)$ ,  $\xi \in [0, b]$ , позволяют получить картины профилей волн для фиксированного значения времени  $\tau = \tau_*$  или изменения  $U(\xi_*, \tau)$  и  $V(\xi_*, \tau)$  во вре-

мени  $\tau > 0$  в заданной точке  $\xi = \xi_*$ .

Представляет интерес исследование взаимного влияния перемещений  $U$  и  $V$  на распространение волн вдоль составного стержня. Наглядно это явление можно наблюдать как «размытие» (дисперсию) профиля импульса начального возбуждения при прохождении его вдоль рассматриваемой конструкции. Для этого удобно рассмотреть изменение максимума энергии деформации. Получим расчётные формулы для вычисления энергии. Объёмная плотность потенциальной энергии упругой деформации в элементах конструкции для случая одноосного напряжённо-деформированного состояния в каждом стержне  $P_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ . Относительные деформации  $\varepsilon_i = u_i'$ , механические напряжения  $\sigma_i = \varepsilon_i E_i$ .

Тогда  $P_i = \frac{1}{2} E_i (u_i')^2$ . Общая (по обоим стержням) упругая энергия в элементы длины  $dx$  составного стержня  $dE = (P_1 S_1 + P_2 S_2) dx$ . Общий объём элемента  $dV_0 = (S_1 + S_2) dx$ . Тогда объёмная плотность  $P$  потенциальной энергии деформации, после преобразований, будет равна:

$$P = \frac{dE}{dV_0} = \frac{E_2 M^2}{2\alpha^2 (1+z_1)} \left[ z z_1 (U' + V')^2 + (U' - V')^2 \right], \quad (27)$$

где

$$z = \frac{E_1}{E_2}, \quad z_1 = \frac{S_1}{S_2}.$$

С помощью соотношений (7) и (15) формула (27) сводится к следующему безразмерному виду:

$$\tilde{P}(\xi, \tau) = z z_1 (U' + V')^2 + (U' - V')^2.$$

При расчётах задавались следующие значения исходных параметров:

- а)  $i = 1$ , сталь,  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_1 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $R_1 = 5 \cdot 10^7$  Па,  $c_1 = 5000$  м/с;  $i = 2$ , медь,  $E_2 = 1,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_2 = 8900$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_2 = 3500$  м/с;
- б)  $S_1 = 2 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $S_2 = 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ;

- в) находим  $z = 1,82$ ,  $z_1 = 2$ ,  $\kappa = 4,328 \cdot 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\alpha = 0,51 \text{ м}$ ,  $\beta = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ,  $b = 1,96$ ,  $r = 2,08$ .

Установим время действия импульса нагрузки. Имеем:  $\tau_0 = \frac{T}{\beta} \ll \frac{L}{3\beta \max\{c_1, c_2\}} = \frac{L}{3\beta c_1} \approx 0,87$ , поэтому полагаем  $\tau_0 = 0,087$ . Далее, задавая  $\delta = 0,1$  согласно [1], находим  $\tau_1$ .

На рис. 1 представлены картины изменения объёмной плотности упругой энергии  $\tilde{P}(\xi, \tau)$  в двухслойном стержне, локальные мгновенные значения которой откладываются по высоте. Изменения плотности энергии вдоль конструкции, расположенной на горизонтальной оси ( $0 \leq \xi \leq 250$ ), представлены по времени с шагом  $\Delta\tau = 4\tau_0$  ( $\tau_0$  — длительность действия импульса внешней нагрузки,  $0 \leq \tau \leq 16$ ). За период времени  $8\Delta\tau < \tau < 10\Delta\tau$  возникает «провал» энергии по всей длине двухслойного стержня. После отражения

волны от свободного конца  $\xi = b$  (при  $\tau > 11\Delta\tau$ ) максимум плотности энергии снова возникает возле середины конструкции, но с меньшей амплитудой. Величина изменения амплитуды энергии, очевидно, зависит от параметра  $\delta$ , связанного с коэффициентом диссипации  $\Delta$ . Для сравнения были сделаны расчёты при значениях  $\delta = 0,7$  и  $\delta = 0,15$ . На рис. 2 видно, что при  $\delta = 0,7$  максимальные значения плотности энергии уменьшаются.

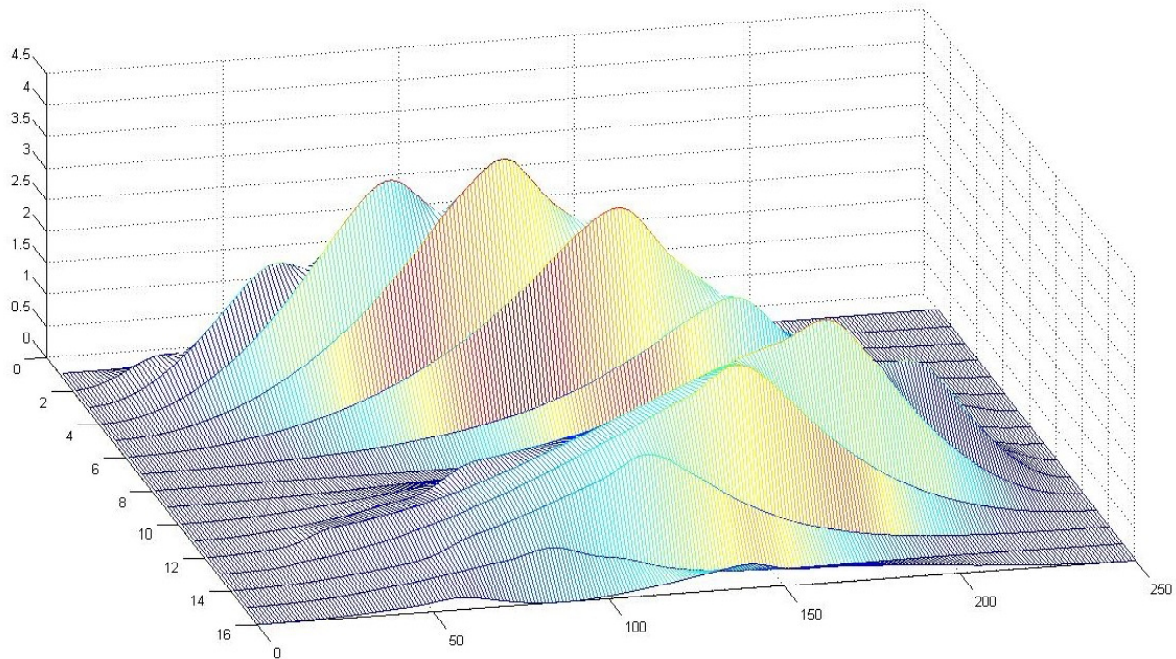


Рисунок 1. Пространственно-временное распределение объёмной плотности упругой энергии

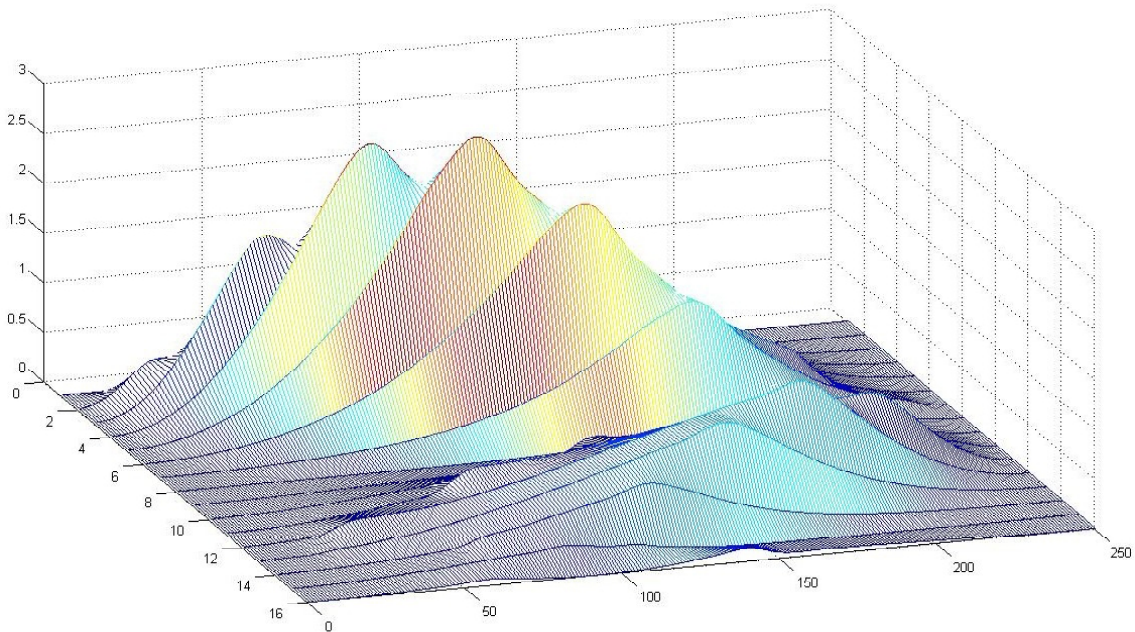


Рисунок 2. Изменение распределения упругой энергии при увеличении потерь

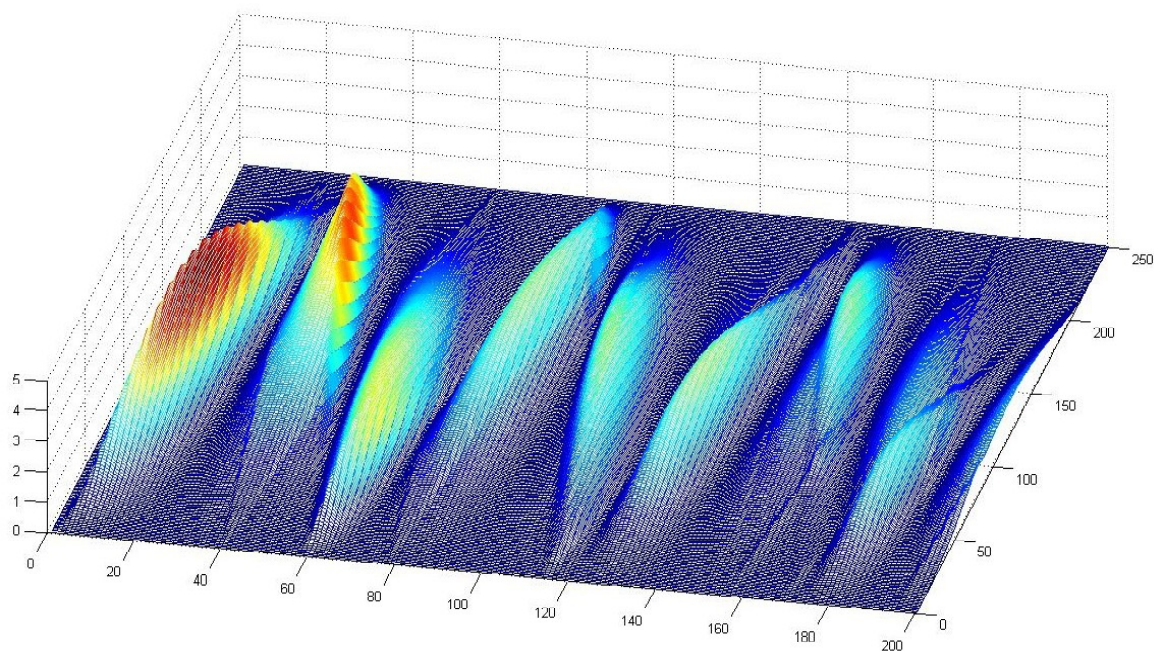


Рисунок 3. К определению групповой скорости упругих волн

Рис. 3 соответствует более длительному времени наблюдения за процессом распространения волн, причём шкала времени содержит 200 делений с шагом  $\Delta\tau = 1,2\tau_0$  и расположена горизонтально. Стержневая конструкция рассматривается со стороны действия нагрузки ( $\xi = 0$ ) и содержит 250 делений. Картины почти установившегося процесса образования «складок» энергетической плотности дают представление о скоростях распространения энергии деформации, т.е. о групповой скорости. Две наклонные складки, образованные проходом падающих и отражённых волн вдоль конструкции, занимают время, приблизительно равное 40 делениям шкалы, т.е.  $\Delta T \approx 40\Delta\tau = 48\tau_0$ . Тогда групповая скорость  $v_g \approx \frac{2b}{\Delta T}$ . Для оценки  $v_g$  можно восстановить физическую размерность и сравнить полученный результат с  $c_1$  и  $c_2$ .

### ВЫВОДЫ

Предложенная математическая модель и методика расчёта могут быть использованы для предварительной оценки прочности при разработке новых конструкций из сложных композитов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Уточнённые модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах

конструкций / Н. И. Архипова, В. И. Ерофеев, В. М. Сандалов // Вестник научно-технического развития. – 2014. – № 12 (88). – С. 3–16.

- [2]. Сагомоян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. Учебное пособие / А. Я. Сагомоян // М. : Изд-во Моск. ун-та. – 1985. – 410 с.
- [3]. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / Вернер Гольдсмит // М. : Ид-во лит. по строит. – 1965. – 448 с.
- [4]. Партон В. З. Методы математической теории упругости : Учебное пособие / В. З. Партон, П. И. Перлин // М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1981. – 688 с.
- [5]. Полянин, А. Д. Eqworld. Мир математических уравнений [Электр. ресурс] / А. Д. Полянин // Электр. данные. – Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>
- [6]. Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов // Изд. 2-е, испр. и доп. Минск : Изд-во БГУ. – 1974. – 232 с.
- [7]. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны / Л. И. Слепян // Л. : Судостроение. – 1972. – 376 с.

Статья поступила в редакцию 13.04.2018

**Мастиновський Ю.В.** канд. техн. наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна, e-mail: ymastinovsky@gmail.com;

**Анпілогов Д.І.** канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Запорізького національного технічного університету, Запоріжжя, Україна, e-mail: anpilogov@ua.fm

## РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ХВИЛЬ В ШАРУВАТИХ В'ЯЗКО-ПРУЖНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

**Мета роботи.** Розробка спрощеної математичної моделі і методики розрахунку для інженерної практики, які дозволяють на стадії створення і доводки надавати попередню оцінку міцності і стійкості шаруватих конструкцій при дії на них навантажень ударного типу. Аналіз можливості застосування стержневих теорій для дослідження перехідних процесів в елементах в'язко-пружних конструкцій.

**Методи дослідження.** Для описання руху складових шаруватих конструкцій використовуються уточнені (некласичні) стержневі моделі. В цих моделях враховано деякі додаткові фактори, які впливають на розповсюдження хвиль напружень. Приймається, що в області контакту стержнів діє сила, пропорційна відносному переміщенню елементів конструкції, і сила тертя, пропорційна відноській швидкості переміщення частинок серединних ліній стержнів. Задача про торцевий удар по складеному (двошаровому) стержню розв'язується аналітично з використанням методів розділення змінних і розкладання в ряди Фур'є.

**Отримані результати.** За допомогою заміни змінних і методу розділення шуканих функцій сформульовано дві крайові задачі для хвильового і телеграфного рівнянь, які зведено до безрозмірного вигляду. Задано закон зміни за часом імпульсного впливу, який моделює дію імпульсу поздовжньої сили на границі конструкції. Отримано розрахункові формули для обчислення значень узагальнених переміщень в кожній зі складових конструкцій, і змін об'ємної густини потенціальної енергії пружної деформації в двошаровому стержні, складеному з різних матеріалів при заданому впливі на границі.

**Наукова новизна.** На основі використання уточненої стержневої моделі двошарової в'язко-пружної конструкції розроблена методика і отримано формули для розрахунку поздовжніх рухів її складових і зміни енергії деформації вздовж конструкції, викликаних нестационарним торцевим навантаженням.

**Практична цінність.** В'язко-пружні шаруваті конструкції широко застосовуються в сучасній техніці. Дослідження якісних закономірностей руху складових конструкцій використовується при оцінці міцності контакту і стійкості при дії різних навантажень. Розроблена методика розрахунку і отримані формули для знаходження переміщень кожного шару і зміни енергії деформації всієї конструкції, засновані на використанні уточненої моделі руху двошарового в'язко-пружного стержня, становлять інтерес для інженерної практики.

**Ключові слова:** шарувата конструкція; стержнева модель; в'язко-пружна взаємодія; енергія деформації; хвилі напружень.

**Mastinovsky Yu.V.** Cand.Sci.(Tech.), Professor, Head of Applied Mathematics Department of Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye, Ukraine, e-mail: ymastinovsky@gmail.com;

**Anpilogov D.I.** Cand.Sci.(Tech.), Associate Professor of the Applied Mathematics Department of Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye, Ukraine, e-mail: anpilogov@ua.fm

## WAVE PROPAGATION IN LAYERED VISCOUS-ELASTIC CONSTRUCTIONS

**Purpose.** Development of a simplified mathematical model and calculation methodology for engineering practice, which allow preliminary assessment of the strength and stability of layered structures at the stage of creation and debugging when impact loads are applied to them. Analysis of the possibility of using the core theories to study transient processes in elements of viscoelastic structures.

**Methodology.** For describing the motion of constituent layered structures we used refined (nonclassical) rod models. These models take into account some additional factors that affect the propagation of stress waves. We assumed that the force in the contact area of the rods is proportional to the relative displacement of the structural elements and the frictional force proportional to the relative velocity of the particles



movement of the median lines of the rods. The problem of front impact on a composite (two-layer) rod is solved analytically by means of the separation of methods of variables and expansions into Fourier series.

**Findings.** By means of change of variables and the method of separation of the unknown functions, two boundary value problems for the wave and telegraph equations reducible to the dimensionless form are formulated. Authors designed the law of change in the time of impulse action, which simulates the action of a longitudinal force pulse at the boundary of the structure. Calculation formulas are used for calculating the values of generalized displacements in each of the components of the construction and changes in the bulk density of the potential energy of elastic deformation in a two-layer rod. Graphs are given and an analysis of the change in the energy of deformation in a two-layer rod made up of different materials is performed for a specified impact at the boundary.

**Scientific novelty.** Based on the use of a refined rod model of a two-layer viscoelastic design, authors have developed a procedure and derived formulas for calculating the longitudinal motions of its components and changing the strain energy along the structure caused by a nonstationary end load.

**Practical value.** Viscoelastic layered structures are widely used in modern technology. Investigation of the qualitative regularities of the motion of component structures is used in assessing the strength of contact and stability under the action of various loads. Developed calculation technique and obtained formulas for finding the displacements of each layer and the change in the deformation energy of the entire structure, based on the use of a refined model of the motion of a two-layer viscoelastic rod, are of interest for engineering practice.

**Keywords:** layered construction; rod model; viscoelastic interaction; deformation energy; stress waves.

#### REFERENCES

- [1]. Arhipova N. I. (2014) Utochnjonnnye modeli v zadachah o rasprostranenii uprugih voln v sloistyh jelementah konstrukcij. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitija*, 12 (88), 3–16.
- [2]. Sagomonjan A. Ja. (1985) Volny naprjazhenija v sploshnyh sredah. Uchebnoe posobie. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 410.
- [3]. Gol'dsmit V. (1965) Udar. Teorija i fizicheskie svoj-stva soudarjaemyh tel. Moscow: Izd-vo lit. po stroit, 448.
- [4]. Parton V.Z. (1981) Metody matematicheskoj teorii uprugosti: Uchebnoe posobie. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 688.
- [5]. Poljanin A.D. Eqworld. Mir matematicheskikh uravnenij [Jelekt. resurs]. Jelekt. dannye. Rezhim dostupa: <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm>
- [6]. Smirnov M.M. (1974) Differencial'nye uravnenija v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka Izd. 2-e, ispr. i dop. Minsk: Izd-vo BGU, 232.
- [7]. Slepjan L.I. (1972) Nestacionarnnye uprugie volny. L.: Sudostroenie, 376.