УДК 539.3

З.Г. Ершова, В.И. Ершов

Тутаевский филиал ГОУ ВПО «Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П.А.Соловьева»

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УТОЧНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Исследуются низкочастотные колебания тонкой цилиндрической панели. Произведено асимптотическое интегрирование системы уравнений. Построены полубезмоментное (основное) решение и интегралы краевого эффекта в окрестности криволинейных краев цилиндрической панели. Решена краевая задача в первом приближении, в результате чего получена формула для асимптотической главной поправки к частоте колебаний цилиндрической панели при различных условиях закрепления прямолинейных и криволинейных краев. Рассмотрен частный случай шарнирного закрепления криволинейных краев цилиндрической панели.

Цилиндрическая панель, низкочастотные колебания, асимптотическое интегрирование, полубезмоментное решение, интегралы краевого эффекта, первое приближение

Введение

Конструктивные формы современных машин и сооружений чрезвычайно разнообразны. В основу многих из них положены оболочки, применяемые в машиностроении, ракетостроении, атомной энергетике, судостроении и т.д. Так как облочечные конструкции очень часто находятся под воздействием динамических нагрузок, очень важным является определение частот и форм собственных колебаний оболочек, так как знание этих характеристик позволит избежать явления резонанса, который может привести к разрушению конструкций.

В настоящей статье рассматриваются свободные низкочастотные колебания тонкой цилиндрической панели. В качестве уравнений взяты уточненные уравнения колебаний, в которых учитывается влияние членов, не входящих в уравнения колебаний пологих оболочек, что позволяет помимо второстепенных членов в этих уравнениях учесть влияние различных граничных условий на частоту колебаний.

1. Уточненные уравнения колебаний

В качестве уравнений движения в этом параграфе возьмем следующие уравнения, записанные в безразмерном виде [1]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial \varphi}+2\varepsilon^4 p^2\lambda u=0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial (S+H)}{\partial x}-Q_2+2\varepsilon^4 p^2\lambda v=0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi}+T_2+2\varepsilon^4 p^2\lambda w=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial \varphi}+Q_1=0,\quad \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}+\frac{\partial H}{\partial x}+Q_2=0.$$

Соотношение упругости и кинематические соотношения имеют вид:

$$M_1=\varepsilon^8(\kappa_1+\nu\kappa_2),\ M_2=\varepsilon^8(\kappa_2+\nu\kappa_1),\ H=\varepsilon^8(1-\nu)\tau,$$

$$\kappa_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \kappa_2=\frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi},\quad \tau=\frac{\partial \gamma_2}{\partial x},\quad \gamma_2=\frac{\partial w}{\partial \varphi}+v,$$

$$T_1=\frac{\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2}{1-\nu^2},\quad T_2=\frac{\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1}{1-\nu^2},\ S=\frac{\omega}{2(1+\nu)}, \qquad (2)$$

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial \varphi}-w,\quad \omega=\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon^8=\frac{h^2}{12(1-\nu^2)\,R^2},$$

где M_i, H — изгибающие и крутящий моменты;

$\varepsilon>0$ — новый малый параметр тонкостенности $(\varepsilon^2=\mu)$, по целым степеням которого будет разложено решение;

$x,\ \varphi$ — безразмерные ортогональные криволинейные координаты на срединной поверхности оболочки;

T_i, S, Q_i — нормальные, касательное, поперечные усилия;

$u,\ v,\ w$ — составляющие перемещений;

λ – параметр частоты колебаний.

Таким образом, в уравнениях (1) учитывается влияние тех членов, которые не входят в уравнения колебаний теории пологих оболочек [2] и имеют порядок ε^2 по сравнению с главными членами. Это позволит учесть влияние различных граничных условий на частоту колебаний [3].

Граничные условия на краях $x = 0$ и $x = l$:

$$u = 0 \text{ или } T_1 = 0, \; v = 0 \text{ или } S + H = 0, \qquad (3)$$

$$w = 0 \quad \text{или} \quad Q_{1*} = Q_1 - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \gamma_1 = 0 \quad \text{или}$$

$M_1 = 0$.

Граничные условия на краю $\varphi = 0$:

$$v = 0 \text{ или } T_2 = 0, \; u = 0 \text{ или } S = 0, \qquad (4)$$

$$w = 0 \quad \text{или} \quad Q_{2*} = Q_2 - \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \gamma_2 = 0 \quad \text{или}$$

$M_2 = 0$.

2. Асимптотическое интегрирование системы (1)

Решение системы уравнений (1) представим в виде

$$w(x,\varphi) = w^0(x,\varphi) + w^k(x,\varphi), \qquad (5)$$

так как напряженное состояние складывается из основного напряженного состояния и краевого эффекта.

Основное (главное) решение имеет изменяемость ε^{-1} по φ и нулевой показатель изменяемости по x, то есть

$$\frac{\partial w^0}{\partial x} \sim w^0, \; \frac{\partial w^0}{\partial \varphi} \sim \frac{1}{\varepsilon} w^0. \qquad (6)$$

Соответствующее напряженное состояние принято называть полубезмоментным.

Краевой эффект вблизи краев $x = 0$, $x = -l$ имеет изменяемость ε^{-2} по x и ε^{-1} по φ, то есть

$$\frac{\partial w^k}{\partial x} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} w^k, \; \frac{\partial w^k}{\partial \varphi} \sim \frac{1}{\varepsilon} w^k, \qquad (7)$$

так как $\frac{\partial w^0}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial w^k}{\partial \varphi}$ должны иметь одинаковую изменяемость по φ, поскольку при удовлетворении граничных условий их необходимо приравнивать при $x = 0$, $x = -l$ и при всех φ. Основные интегралы представим приближенно в виде

$$w^0(x,y) = w_0^0(x,y) + \varepsilon^2 w_2^0(x,y), \quad y = \frac{\varphi}{\varepsilon}, \qquad (8)$$

где $w_0^0(x,y)$, $w_2^0(x,y)$ – нулевое и первое приближения основных интегралов.

Здесь влиянием закрепления второго края $\varphi = \varphi_0$ пренебрегаем, считая, что при приближении к нему решение затухает. Поэтому рассмотрим колебания цилиндрической панели, занимающей область $-l \le x \le 0$, $-\infty \le y \le 0$, причем $l \sim 1$.

Параметр частоты l ищем в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \lambda_R. \qquad (9)$$

Величина λ_0, одинаковая для одной группы граничных условий на криволинейных краях, была определена в [2]. Через λ_R обозначен остаточный член.

Будем определять величину λ_2. Она зависит от младших членов в уравнениях равновесия (1) и от граничных условий при $\varphi = 0$ и $x = 0$, $x = -l$.

Для того, чтобы рассматривать различные варианты граничных условий, необходимо иметь выражение всех функций, определяющих напряженно-деформированное состояние цилиндрической панели. Ниже получены перемещения u, v, углы поворота γ_1, γ_2, тангенциальные усилия T_1, S, T_2, моменты M_1, H, M_2 и перерезывающие силы Q_{1*}, Q_{2*} в нулевом и первом приближениях. Индексы опускаем.

Колебания будут низкочастотными, если точно или приближенно выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \omega = 0, \qquad (10)$$

то есть

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (11)$$

Поэтому при построении основного решения в нулевом приближении в системах уравнений (1) и (2) слагаемые H, Q_2, v, $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial \varphi}$, T_2, ε_2, ω следует заменить нулями. Тогда, учитывая характер изменяемости (2), из уравнения (11) получаем перемещения (в дальнейшем переходим к переменной *y* по формуле (8))

$$v=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{y} w\,dy\,,\quad u=-\varepsilon^2\iint\limits_{-\infty}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}dy^2\,. \qquad (12)$$

Из соотношений (2) находим последовательно

$$\varepsilon_1=-\varepsilon^2\iint\limits_{-\infty}^{y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dy^2\,,\quad \kappa_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,\quad \kappa_2=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,,$$

$$\tau=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,; \qquad (13)$$

$$M_1=\varepsilon^6\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,,\quad M_2=\varepsilon^6\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,,\quad H=\varepsilon^7(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,,$$

$$Q_{1*}=-\varepsilon^6(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2\partial x}\,,\quad Q_{2*}=-\varepsilon^5\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\,.$$

Из уравнений равновесия (1) определяем усилия

$$T_1=-\varepsilon^2\iint\limits_{-\infty}^{y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dy^2\,,\quad S=\varepsilon^3\iiint\limits_{-\infty}^{y}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}dy^3\,,$$

$$T_2=-\varepsilon^4\iiiint\limits_{-\infty}^{y}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}dy^4\,. \qquad (14)$$

Для того, чтобы получить основные интегралы в первом приближении, возьмем $\varepsilon_2\neq 0$, $\omega\neq 0$. Тогда

$$v=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{y} w\,dy+\varepsilon^3\nu\iiint\limits_{-\infty}^{y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dy^3\,. \qquad (15)$$

Аналогичным способом определяем остальные неизвестные. Результаты поместим в таблицу 1, используя для краткости обозначения для производных и повторных интегралов

$$\partial_z^n w\equiv\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\,,\quad n>0$$

$$\partial_z^{-1}w\equiv\int\limits_{-\infty}^{z} w\,dz\,,\quad \partial_z^n w\equiv\partial_z^{-1}\partial_z^{n+1}w\,,\quad n<-1 \qquad (16)$$

где n – переменная, по которой проводится дифференцирование или интегрирование.

Интегралы краевого эффекта при $x=0$ в нулевом приближении имеют вид [4]

$$w^k=C_1 w_1^k(y)e^{r_1\zeta}+C_2 w_2^k(y)e^{r_2\zeta}\,,\quad \zeta=\frac{x}{\varepsilon^2}\,, \qquad (17)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а

$$r_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,,\quad r_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,. \qquad (18)$$

Используя те же соотношения, что и при нахождении основных интегралов, и выражения (16), получаем интегралы краевого эффекта при $x=0$ для всех функций, входящих в формулировку граничных условий на криволинейных краях

$$u_j^k=\varepsilon^2\frac{\nu}{r_j}w_j^k\,,\quad v_j^k=\varepsilon^3\frac{(2+\nu)}{r_j^2}\frac{\partial w_j^k}{\partial y}\,,\quad \gamma_{1j}^k=\varepsilon^{-2}r_j w_j^k\,,$$

$$T_{1j}^k=-\frac{\varepsilon^2}{r_j^2}\frac{\partial^2 w_j^k}{\partial y^2}\,,\quad S_j^k=\frac{\varepsilon^2}{r_j}\frac{\partial w_j^k}{\partial y}\,, \qquad (19)$$

$$Q_{1*j}^k=-\varepsilon^2 r_j^3 w_j^k\,,\quad M_{1j}^k=\varepsilon^4 r_y^k w_j^k\,.$$

Как и для основных интегралов, для интегралов краевого эффекта приведем таблицу 2 с использованием тех же обозначений (16).

Таблица 1

f	Основные интегралы
u	$-\varepsilon^2\partial_x\partial_y^{-2}w^0+\varepsilon^4(2+\nu)\partial_x^3\partial_y^{-4}w^0$
v	$\varepsilon\partial_y^{-1}w^0+\varepsilon^3\nu\partial_x^2\partial_y^{-3}w^0$
γ_1	$\partial_x w^0$
T_1	$-\varepsilon^2\partial_x^2\partial_y^{-2}w^0+\varepsilon^4 2\partial_x^4\partial_y^{-4}w^0$
S	$\varepsilon^3\partial_x^3\partial_y^{-3}w^0-\varepsilon^5 2\partial_x^5\partial_y^{-5}w^0$
M_1	$\varepsilon^6\nu\partial_y^2 w^0+\varepsilon^8\left(\partial_x^2 w^0+\nu w^0\right)$
Q_{1*}	$-\varepsilon^6(2-\nu)\partial_x\partial_y^2 w^0-\varepsilon^8\left(\partial_x^3 w^0+(2-\nu)\partial_x w^0\right)$

Таблица 2

f	Интегралы краевого эффекта
u	$-\varepsilon^2\nu\partial_\zeta^3 w^k$
v	$-\varepsilon^2(2+\nu)\partial_\zeta^2\partial_y w^k$
T_1	$\varepsilon^2\partial_\zeta^2\partial_y^2 w^k$
S	$-\varepsilon\partial_\zeta^3\partial_y w^k$
M_1	$\varepsilon^4\partial_\zeta^2 w^k$
Q_{1*}	$-\varepsilon^2\partial_\zeta^3 w^k$

При $x=-1$ интегралы краевого эффекта в нулевом приближении имеют вид

$$w^k = C_3 w_3^k(y) e^{-r_1\zeta_1} + C_4 w_4^k e^{-r_2\zeta_1}, \quad \zeta_1 = \frac{x+1}{\varepsilon^2}. \quad (20)$$

Для остальных функций, входящих в граничные условия, интегралы краевого эффекта при $x=-1$ будут иметь тот же вид, что и в формулах (19) и в таблице 2, с той лишь разницей, что у функций u, γ_1, S, H, Q_{1*} изменится знак.

3. Решение краевой задачи в первом приближении

Займемся краевой задачей. Подставим в третье уравнение равновесия (1) выражения для T_2, Q_1, Q_2, из таблицы 1 и

$$w^0 = w_0^0 + \varepsilon^2 w_2^0, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2. \quad (21)$$

Затем продифференцируем полученное уравнение четыре раза по y и, приравнивая нулю сумму слагаемых одного порядка по ε, получим два уравнения:

$$\frac{\partial^8 w_0^0}{\partial y^8} - 2p^2\lambda_0 \frac{\partial^4 w_0^0}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w_0^0}{\partial y^4} = 0 \quad (22)$$

и

$$\frac{\partial^8 w_2^0}{\partial y^8} - 2p^2\lambda_0 \frac{\partial^4 w_2^0}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w_2^0}{\partial y^4} = f(x,y), \quad (23)$$

где

$$f(x,y) = 2p^2\lambda_2 \frac{\partial^4 w_0^0}{\partial y^4} - 4\frac{\partial^8 w_2^0}{\partial x^2 \partial y^6} - 2\frac{\partial^6 w_0^0}{\partial y^6} + 2p^2\lambda_0\left(2\frac{\partial^4 w_0^0}{\partial x^2\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0^0}{\partial y^2}\right). \quad (24)$$

Вместе с граничными условиями они образуют краевую задачу в нулевом и первом приближениях.

Рассмотрим краевую задачу в первом приближении. Условие существования решения этой неоднородной задачи служит для определения поправки λ_2, входящей в правую часть уравнения (23). Для того, чтобы получить это условие, проинтегрируем уравнение (23) по y от $-\infty$ до y четыре раза, затем умножим его на w_0^0 и проинтегрируем его теперь уже по полуполосе $G = \{-1 \le x \le 0, -\infty \le y \le 0\}$:

$$\iint_G \left(\frac{\partial^4 w_2^0}{\partial y^4} - 2p^2\lambda_0 w_2^0 + \int\int\int\int_{-\infty}^{y} \frac{\partial^4 w_2^0}{\partial x^4}\partial y^4 \right) w_0^0 dxdy =$$

$$= \iint_G \left(\int\int\int\int_{-\infty}^{y} f(x,y) dy^4 \right) w_0^0 dxdy. \quad (25)$$

В результате интеграл по площади полуполосы в левой части (25) обратится в нуль и мы получим выражение для λ_2 в виде

$$\lambda_2 = I_1 + I_2 + I_3 \Big|_{x=-1}^{x=0}, \quad (26)$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{2p^{3/2}1}\iint_G \partial^{-4} f\left(w_0^0, \lambda_0\right) w_0^0 dxdy,$$

$$I_2 = \frac{1}{2p^{3/2}1}\int_{-1}^{0}\Big(w_0^0\partial_y^3 w_2^0 - \partial_y w_0^0 \partial_y^2 w_2^0 + \partial_y^2 w_0^0 \partial_y w_2^0 - \partial_y^3 w_0^0 w_2^0 + \partial_y^{-1} w_0^0 \partial_x^4 \partial_y^{-4} w_2^0 + \partial_x\partial_y^{-2} w_0^0 \partial_x^3 \partial_y^{-3} w_2^0 - \partial_x^3\partial_y^{-3} w_0^0 \partial_x \partial_y^{-2} w_2^0 - \partial_x^4 \partial_y^{-4} w_0^0 \partial_y^{-1} w_2^0 \Big)\Big|_{y=0} dx,$$

$$I_3 = \frac{1}{2p^{3/2}1}\int_{-\infty}^{0}\Big(-\partial_y^{-1} w_0^0 \partial_x^3 \partial_y^{-3} w_2^0 - \partial_x \partial_y^{-2} w_0^0 \partial_x^2 \partial_y^{-2} w_2^0 + \partial_x^2 \partial_y^{-2} w_0^0 \partial_x \partial_y^{-2} w_2^0 + \partial_x^3 \partial_y^{-3} w_0^0 \partial_y^{-1} w_2^0 \Big) dy. \quad (27)$$

Множитель перед интегралами связан с вводимой ниже нормировкой функции w_0^0.

При последующем вычислении интегралов вместо x и y удобно перейти к новым переменным ξ и η по формулам

$$\xi = x/1, \quad -1 \le \xi \le 0, \quad \eta = y\sqrt{p}. \quad (28)$$

Тогда

$$w_0^0(x,y) = X(\xi)Y(\eta), \quad (29)$$

причем

$$X^{(4)} - \alpha^4 X = 0, \quad Y^{(8)} - 2\lambda_0 Y^{(4)} + Y = 0. \quad (30)$$

Функция $X(\xi)$ зависит от главных граничных условий на криволинейных краях, а функция $Y(\eta)$ – от всех граничных условий на прямолинейном крае $\varphi = 0$. Величина λ_0 для соответствующих граничных условий на слабо закрепленном крае $x = 0$ совпадает со значением λ_0, полученным для задачи устойчивости при осевом сжатии.

Будем считать функции $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ нормированными

$$\int_{-1}^{0} X^2 d\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{0} Y^2 d\eta = 1. \qquad (31)$$

В результате замен (28) при вычислении интегралов в (27) безразмерная длина l входит множителем.

Величины I_1 и I_2 в (27) зависят от граничных условий на краю $y = 0$ и от главных граничных условий на криволинейных краях.

Величины I_3 зависят, кроме всего прочего, от дополнительных граничных условий на криволинейных краях, причем каждый криволинейный край дает, независимо от другого, свой вклад.

Вычисляя двойной интеграл в I_1 находим

$$I_1 = \frac{1}{l^2 p}\left(\lambda_0 b_{-2,0}\left(l^2 - 2a_{20}\right) + b_{20}\left(2a_{20} + l^2\right)\right), \qquad (32)$$

где имеющие порядок единицы безразмерные коэффициенты a_{kn} и b_{kn} равны

$$a_{kn} = \int_{-1}^{0} \frac{d^k X}{d\xi^k}\frac{d^n X}{d\xi^n}\partial\xi, \quad b_{kn} = \int_{-\infty}^{0} \frac{d^k Y}{d\eta^k}\frac{d^n Y}{d\eta^n}\partial\eta. \qquad (33)$$

С учетом уравнения (30), которому удовлетворяет функция $X(\xi)$, находим сумму

$$I_1 + I_2 = \frac{a_{20}\left(\nu b_{20} + b_{-4,-2} - (1-\nu)b_{11}\right)}{pl_2} + \frac{(a_{20} + a_{11})\partial^{-1}Y_0\partial^{-6}Y_0}{pl^2} - \frac{3b_{-1,3} + b_{-5,-1}}{2p}. \qquad (34)$$

Приведенная выше величина $I_1 + I_2$ зависит лишь от главных граничных условий на криволинейных краях. При построении слагаемого I_3 в рассмотрение включаются и дополнительные граничные условия, а вместе с ними и интегралы краевого эффекта.

4. Шарнирно опертые криволинейные края

На краях $x = 0$ и $y = -l$ возьмем граничные условия шарнирной опоры 0110, при которых возможно точное разделение переменных. Тогда решение можно искать в безразмерном виде

$$w(\xi,\eta) = \left(Y^0(\eta) + \varepsilon^2 Y^2(\eta) + O\left(\varepsilon^4\right)\right)X(\xi),$$

$$X(\xi) = \sqrt{2}\sin\pi\xi, \qquad (35)$$

где независимые переменные ξ и η введены по формулам (28) при $\alpha = \pi$. При этом краевой эффект в окрестности криволинейных краев не возникает и обращается в нуль зависящий от интегралов краевого эффекта интеграл I_3. В силу формул (21), (26), (34) при

$$p = \pi/l, \ \alpha = \pi, \ a_{11} = \pi^2, \ a_{20} = -\pi^2 \qquad (36)$$

получаем выражение для параметра частоты λ в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_2 + O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (37)$$

где

$$\lambda_2 = p\left(b_{-4,-2} + (1-\nu)b_{11} - \nu b_{20}\right) - \frac{3b_{-1,3} + b_{-5,-1}}{2p}. \qquad (38)$$

Рассматриваемый здесь случай точного разделения переменных дает возможность проверить правильность формулы (38) путем сопоставления с результатами численного интегрирования одномерной системы, получающейся после разделения переменных (35).

Исходная система уравнений (1) может быть записана в векторной форме.

$$\frac{dZ}{d\eta} = A(\lambda,\varepsilon)Z, \qquad (39)$$

где матрица A получена в [4]. Будем искать ее решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, в виде

$$w(\eta,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{4} C_k \exp\left(q_k(\varepsilon)\eta\right), \quad \operatorname{Re} q_k > 0, \qquad (40)$$

где C_k – произвольные постоянные;

q_k – корни характеристического уравнения системы (39)

$$\left|A(\lambda,\varepsilon) - qE\right| = 0. \qquad (41)$$

Остальные неизвестные функции имеют тот же вид (40). Искомый параметр частоты λ определяем в результате подстановки решения (40) в граничные условия (4).

Будем сравнивать значения частоты колебаний ω, найденные различными способами. Представим ω в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2}}\Omega, \quad \Omega = \frac{\varepsilon^2\alpha}{l}\sqrt{2\lambda} \qquad (42)$$

и будем сравнивать безразмерные величины Ω.

В качестве примера возьмем l=1, $\nu = 0.3$ и три значения $h_* = h/R = 0.01, 0.002$. Результаты сравнения помещены в таблице 5. Приведены значения параметра Ω_0 в нулевом приближении, найденные по формуле (42) при $\lambda = \lambda_0$, значения параметра $\Omega^{(a)}$, полученные с помощью асимптотической формулы (37), а также значения параметра $\Omega^{(т)}$, найденные с использованием точного решения (40).

Видим, что с уменьшением толщины оболочки точность асимптотической формулы (37) возрастает для всех рассмотренных вариантов граничных условий, что является косвенной проверкой ее правильности.

Таблица 5

Гр. усл.	0000	0001	0100	0101	0010	1000
$h_* = 0.01$						
Ω_0	0.0820	0.1153	0.1153	0.1582	0.2198	0.2198
$\Omega^{(a)}$	0.1021	0.1262	0.1314	0.1620	0.2191	0.2238
$\Omega^{(т)}$	0.1004	0.1244	0.1315	0.1613	0.2202	0.2261
$h_* = 0.002$						
Ω_0	0.0367	0.0516	0.0516	0.0707	0.0983	0.0983
$\Omega^{(a)}$	0.0407	0.0536	0.0549	0.0714	0.0983	0.0994
$\Omega^{(т)}$	0.0405	0.0534	0.0549	0.0714	0.0984	0.0996

Заключение

Для вычисления частот получена двухчленная асимптотическая формула, учитывающая влияние как главных, так и дополнительных граничных условий на частоту колебаний.

Перечень ссылок

1. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 383 с.

2. Ершова З.Г., Ершов В.И. Колебания цилиндрических панелей//Вестник двигателестроения. – Запорожье, 2009, №3 – с.42-45

3. Ершова З.Г., ЕршовВ.И. Устойчивость цилиндрических панелей//Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков, 2005, №9 (25) – с.102-105.

4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. – М. : Наука. Физматлит., 1995. – 320 с.

Поступила в редакцию 31.05.2010 г.

Z.G. Ershova, V.I. Ershov

INTEGRATION OF HIGH PUNCTUAL EQUATION FOR CYLINDRICAL PANEL'S FLUCTUATION

Досліджуються низькочастотні коливання тонкої циліндричної панелі. Проведено асимптотичне інтегрування системи рівнянь. Побудовані напівмиттєві (основні) рішення і інтеграли крайового ефекту в околиці криволінійних країв циліндричної панелі. Розв'язана крайова задача в першому наближенні, в результаті чого, було отримана формула для асимптотичної головної поправки, для частоти коливань циліндричної панелі за різних умов закріплення прямолінійних і криволінійних країв. Розглянуто поодинокий випадок шарнірного кріплення криволінійних країв циліндричної панелі.

Циліндрична панель, низькочастотні коливання, асимптотичне інтегрування, напівмиттєве рішення, інтеграли крайового ефекту, перше наближення

Low frequency fluctuations of slim cylindrical panel has been analyzed. Asymptotical integration of equation's system for cylindrical panel was conducted. Semi-without moment (fundamental) equation and integrals of the border effect for environment of curvilinear borders of cylindrical panel were received. Border problem in the first approaching was determined, as a result formula for main asymptotical correction of cylindrical panel's frequency fluctuations by different conditions of rectilinear and curvilinear border's fastening was obtained. Particular case of hinge fixing of curvilinear borders of cylindrical panel was considered in the article.

Cylindrical panel, low frequency fluctuations, asymptotical integration, semi-without moment obtain, border effect, first approaching