

УДК 539.374.001.8.621.7-111

**Д-р техн. наук В. В. Чигиринский, д-р техн. наук А. Я. Качан,
А. В. Иванов, Е. Н. Мисник**

Запорожский национальный технический университет

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТОГО ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

На базе замкнутого решения плоской задачи теории пластичности получены аналитические зависимости, позволяющие определить модель простого процесса прокатки в условиях неоднородного пластического течения среды. В зависимости от постановки задачи, граничных условий, показана возможность получить асимметричное распределение контактных напряжений по длине очага деформации.

Ключевые слова: замкнутое решение, контактные напряжения, асимметрия нагружения, прокатка.

Введение

В работах [1–3] показано замкнутое решение плоской задачи теории пластичности. При решении ряда теоретических и практических задач возникает необходимость исследовать различные процессы пластического течения, в данном случае простой процесс прокатки. Его отличие, например, от осадки, заключается в асимметричном распределении контактных давлений по длине очага деформации, вследствие наклона текущей контактной поверхности. Рассмотрим постановку и аналитическое решение задачи.

Постановка задачи

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot \kappa^2,$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F, \quad \xi_x + \xi_y = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}. \quad (1)$$

Граничные условия заданы в напряжениях

$$\tau_n = -k \cdot \sin[A\Phi - 2 \cdot \alpha],$$

$$\text{или} \quad \tau_n = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2 \cdot \alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2 \cdot \alpha \right), \quad (2)$$

Введение угла α в граничные условия позволяет учитывать влияние геометрии инструмента

на параметры процесса. Граничные условия будут тождественно удовлетворены, если в (2) принять

$$\tau_{xy} = k \cdot \sin A\Phi. \quad (3)$$

Решение задачи

Первые три уравнения системы (1) можно привести к обобщенному уравнению равновесия

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}. \quad (4)$$

Сопротивление пластической деформации рассматривается как переменная величина и является функцией координат очага деформации

$$k = H_\sigma \cdot \exp \theta'. \quad (5)$$

Подставляя (3) и (5) в обобщенное уравнение равновесия (4), имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ H_\sigma \cdot [\theta'_{xx} + (\theta'_x + A\Phi_y)^2 - \theta'_{yy} - (\theta'_y - A\Phi_x)^2] + (H_\sigma)_{xx} + 2 \times \right. \\ & \times (H_\sigma)_x \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) - (H_\sigma)_{yy} - 2 \cdot (H_\sigma)_y \cdot (\theta'_y - A\Phi_x) \left. \right\} \cdot \sin A\Phi + \\ & + \left\{ 2 \cdot H_\sigma \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) - 2 \cdot (H_\sigma)_y \cdot (A\Phi_y + \theta'_x) + 2 \times \right. \\ & \times (H_\sigma)_x \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) + H_\sigma \cdot (A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy}) \left. \right\} \cdot \cos A\Phi = -2 \cdot H_\sigma \times \\ & \times A\Phi_{xy} \cdot \sin A\Phi + [2 \cdot (H_\sigma)_{xy} + 2 \cdot H_\sigma \cdot \theta'_{xy}] \cdot \cos A\Phi. \quad (6) \end{aligned}$$

Решением обобщенного уравнения равновесия (6) является функциональная зависимость вида

$$\tau_{xy} = H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi, \quad (7)$$

при выполнении соотношений $\theta'_x = -A\Phi_y$, $\theta'_y = A\Phi_x$.

Подставляя значения касательных напряжений (7) в уравнения равновесия системы (1), после дифференцирования по координатам и интегрирования, получим нормальные составляющие тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x) + C. \end{aligned} \quad (8)$$

Анализ решения показывает, что значение H_σ может быть получено в виде

$$H_\sigma = C''_\sigma \cdot x + C'_\sigma.$$

При этом обе части уравнения связи, с учетом (8), принимают вид, $f(x) = f(y) = 0$,

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \pm \operatorname{ctg} A\Phi, \quad \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = \pm \operatorname{ctg} B\Phi.$$

С учетом условия несжимаемости (вторая половина системы (1))

имеем $\dot{\gamma}_{xy} = \pm 2 \cdot \operatorname{tg} B\Phi \cdot \dot{\xi}_x$ или $\dot{\gamma}_{xy} \mp 2 \cdot \operatorname{tg} B\Phi \cdot \dot{\xi}_y$.

Уравнение совместности скоростей деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \xi_x \cdot \operatorname{tg} B\Phi. \quad (9)$$

Решаем относительно неизвестной функции ξ_x . Для компонентов тензора скоростей деформаций можно записать

$$\begin{aligned} \xi_x &= -\xi_y = \beta \cdot \cos B\Phi = H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \cos B\Phi, \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \sin B\Phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя зависимости (10) в дифференциальное уравнение (9), получим

$$\begin{aligned} \left\{ H_\xi \cdot \left[\theta''_{xx} - (\theta''_x + \operatorname{ВФ}_y)^2 + \theta''_{yy} + (\theta''_y - \operatorname{ВФ}_x)^2 \right] - (H_\xi)_{xx} - 2 \times \right. \\ \left. \times (H_\xi)_x \cdot (\theta''_x + \operatorname{ВФ}_y) + (H_\xi)_{yy} + 2 \cdot (H_\xi)_y \cdot (\theta''_y - \operatorname{ВФ}_x) \right\} \sin B\Phi + \\ + \left\{ 2 \cdot H_\xi \cdot (\operatorname{ВФ}_x - \theta''_y) \cdot (\theta''_x + \operatorname{ВФ}_y) - 2 \cdot (H_\xi)_y \cdot (\operatorname{ВФ}_y + \theta''_x) + 2 \times \right. \\ \left. \times (H_\xi)_x \cdot (\operatorname{ВФ}_x - \theta''_y) + H_\xi \cdot (\operatorname{ВФ}_{xx} - \operatorname{ВФ}_{yy}) \right\} \cos B\Phi = 2 \cdot H_\xi \times \\ \times \operatorname{ВФ}_{xy} \cdot \sin B\Phi + \left[2 \cdot (H_\xi)_{xy} + 2 \cdot H_\xi \cdot \theta''_{xy} \right] \cos B\Phi. \end{aligned} \quad (11)$$

При $\theta''_x = -\operatorname{ВФ}_y$, $\theta''_y = \operatorname{ВФ}_x$ дифференциальное уравнение (11) превращается в тождество.

Анализ (11), (6) показывает, что компоненты тензора напряжений и компоненты тензора ско-

ростей деформаций определяются одинаковыми гармоническими функциями координат θ и Φ . Действительно,

$$\theta' = -A \cdot \theta, \quad \theta'' = -B \cdot \theta, \quad \text{при } A = B, \quad \theta' = \theta''.$$

Результат получен благодаря решению замкнутой задачи и является здесь определяющим. Поля напряжений и скоростей деформаций зависят от одинаковых функций, являющихся параметрическими. Это позволяет установить между ними аналитическую связь в виде математической модели деформируемой среды

$$\text{С учетом } m = \frac{A}{B}, \quad T_i = \alpha \cdot (H_i)^m, \quad (12)$$

где T_i – интенсивность касательных напряжений, H_i – интенсивность скорости деформации сдвига.

Используя значение H_σ можно показать, что со стороны входа и выхода из очага деформации задействованы разные константы, следовательно, разные напряжения входа и выхода. Действительно,

$$H_\sigma = \frac{C_0 \cdot (l_{\text{оп}} - x) + C_1 \cdot (l_{\text{от}} + x)}{l},$$

где $l_{\text{оп}}, l_{\text{от}}, l$ – длины зон опережения, отставания и всего очага деформации;

C_0, C_1 – постоянные, определяющие напряжения на входе и выходе из очага деформации. При этом

$$C''_\sigma = \frac{C_0 \cdot l_{\text{оп}} + C_1 \cdot l_{\text{от}}}{l}, \quad C'_\sigma = \frac{C_1 - C_0}{l}.$$

В первом приближении угол $\alpha = \operatorname{const}$. Функцию $A\Phi$ определяем, решая уравнение Лапласа, в виде

$$\begin{aligned} A\Phi &= AA'_6 \cdot (x + l_{\text{от}}) \cdot y + \\ &+ AA''_6 \cdot (x - l_{\text{от}}) \cdot y - 2\alpha \cdot \frac{2y}{h(x)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где AA'_6, AA''_6 – постоянные, определяемые граничными условиями трения на контакте со стороны выхода и входа в очаг деформации.

Определяя угол α , из геометрических соотношений, получим $\alpha' = 2\alpha$, где α' – угол захвата при прокатке.

Используя возможности полубратного метода решения задачи, получаем

$$AA'_6 = 2 \cdot \frac{A\Phi'_1 - \alpha'}{l \cdot h_1}, \quad AA''_6 = 2 \cdot \frac{A\Phi'_0 + 3\alpha'}{l \cdot h_0},$$

где $A\Phi'_1 = A\Phi'_0 = a \tan f \cdot (1 - f)$, f – коэффициент трения.

Так как, $\theta'_x = -A\Phi_y$, $\theta'_y = A\Phi_x$, тогда

$$\theta' = -\frac{1}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot (x^2 - y^2) - (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot x + \alpha' \cdot \frac{2x}{h(x)}. \quad (14)$$

Длину зоны опережения можно определить из условия $A\Phi = 0$, при $x = 0$, тогда после упрощений и преобразований имеем

$$l_{on} = \frac{l}{2} \cdot \frac{A\Phi'_1 - \alpha'}{A\Phi'_1 + \alpha'}$$

переходя к углам

$$\gamma = \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{A\Phi'_1 - \alpha'}{A\Phi'_1 + \alpha'}$$

Структурно, последнее выражение напоминает формулу Эжелунда-Павлова.

С учетом $\sigma_0 = -2H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi$ в выражениях (8), напряжения на контакте принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + k_0, \\ \sigma_x &= -3H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + k_0. \end{aligned} \quad (15)$$

При этом C_0, C_1 соответственно

$$C_0 = \frac{k_0}{\exp \theta_0 \cdot \cos A\Phi_0}, \quad C_1 = \frac{k_1}{\exp \theta_1 \cdot \cos A\Phi_1}$$

Из граничных условий определяем θ_0, θ_1

$$\theta'_0 = -\frac{1}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(l_{om}^2 - \frac{h_0^2}{4} \right) + (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot l_{om} - \alpha' \cdot \frac{2 \cdot l_{om}}{h_0};$$

$$\theta'_1 = -\frac{1}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(l_{on}^2 - \frac{h_1^2}{4} \right) - (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot l_{on} + \alpha' \cdot \frac{2 \cdot l_{on}}{h_1}.$$

Значения $A\Phi_0 = A\Phi'_0 + 2\alpha'$, $A\Phi_1 = -(A\Phi'_1 + 2\alpha')$.

Расчеты по выражениям (15) проводились для простого случая прокатки при разных значениях коэффициента трения f и фактора формы l_d/h_{cp} . Результаты расчета представлены на рис. 1, 2.

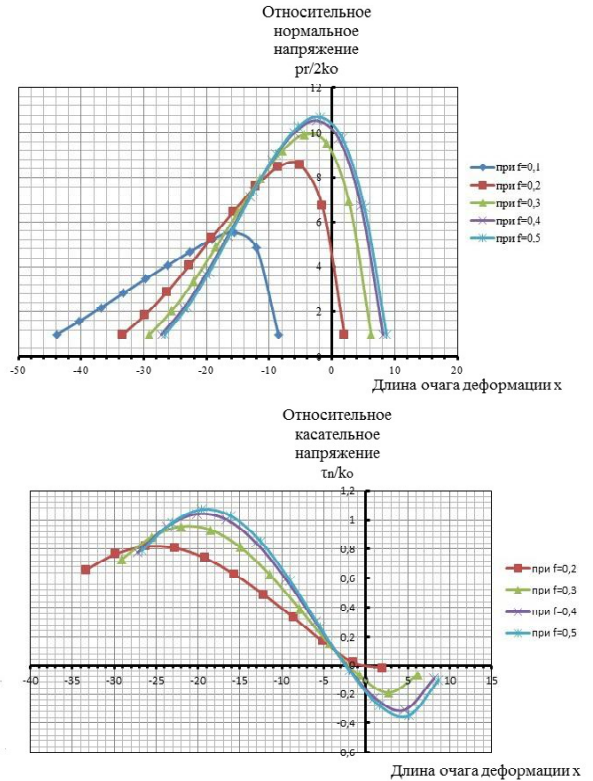


Рис. 1. Распределение контактных напряжений при прокатке $l_d/h_{cp} = 7$, и коэффициент трения $f = 0, 0,1-0,56$

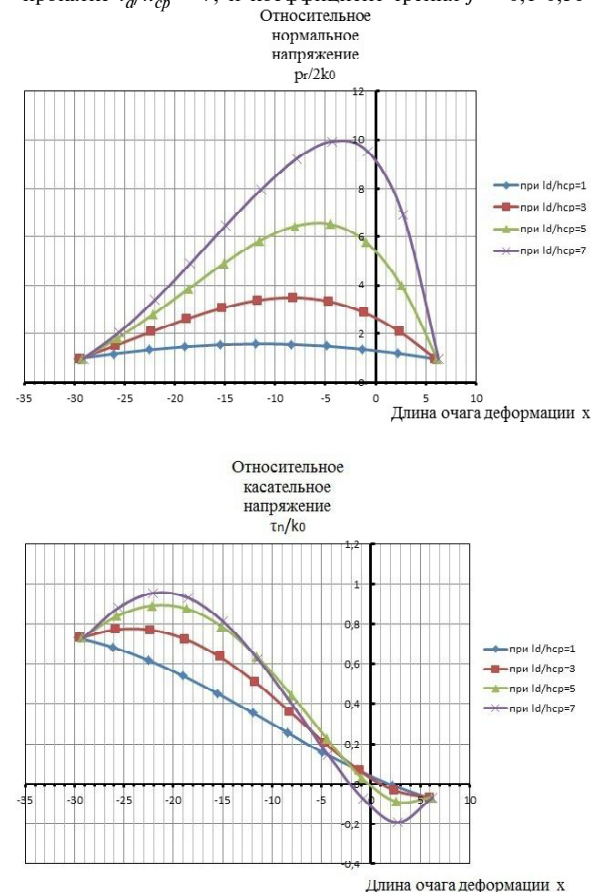


Рис. 2. Распределение контактных напряжений при прокатке $l_d/h_{cp} = 1,3,5,7$, и коэффициент трения $f = 0,3$

Распределение контактных напряжений реагируют на указанные параметры, как по величине, так и характеру распределения. При небольших значениях фактора формы, эпюра, примерно, симметрична относительно середины очага деформации. При больших значениях появляется явная асимметрия, со сдвигом в сторону выхода из очага деформации, что соответствует экспериментальным данным Чекмарева А. П., Клименко П. Л. С увеличением коэффициента трения контактные напряжения увеличиваются, а пик эпюры перемещается в сторону входа. Фактор формы при прокатке, во многих случаях, является определяющим параметром, оказывает влияние на распределение и величину удельного давления.

Выводы

1. На базе замкнутого решения плоской задачи теории пластичности разработан метод с использованием гармонических функций для определения полей напряжений, скоростей деформаций.

2. В аналитических выражениях для определения указанных полей содержатся одинаковые координатные функции, которые позволяют связать интегральные характеристики напряженно-

го и деформированного состояний деформируемого материала.

3. Рассмотрена продольная асимметричная задача теории пластичности, прокатка. Показано решение, учитывающее асимметрию процесса, через граничные условия. Распределение контактных напряжений соответствует качественной и количественной оценке в сопоставлении с экспериментальными данными.

Перечень ссылок

1. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / Чигиринский В. В. // Изв. вузов. Черная металлургия. — 2009. — № 5. — С. 11–16.
2. Чигиринский В. В. Новое решение плоской задачи теории пластичности / Чигиринский В. В. // Науч. тр. ДонНТУ, серия : Металлургия. — Донецк, 2008. — Вып. 10 (141). — С. 105–115.
3. Чигиринский В. В. Новый метод решения задач теории пластичности / Чигиринский В. В. // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. — 2008. — № 1. — С. 57–62.

Поступила в редакцию 20.09.2010

Чигиринський В.В., Качан О.Я., Іванов А.В., Місник О.М. Розробка математичної моделі простого процесу прокатки з використанням методу гармонічних функцій

На базі замкнутого рішення плоскої задачі теорії пластичності показано аналітичні залежності, які дозволяють визначити модель процесу прокатки в умовах неоднорідної пластичної течії середовища. В залежності від постановки задачі, граничних умов, показана можливість визначення асиметричного розподілу контактних напружень в осередку деформування.

Ключові слова: замкнуте рішення, контактні напруження, асиметричне навантаження, прокатка.

Chigirinskiy V., Kachan A., Ivanov A., Misnik E. Development of mathematical model of simple process of rolling with the use of method of harmonic functions

On the base of the reserved decision of flat task of theory of plasticity analytical dependences, allowing to define the model of simple process of rolling in the conditions of heterogeneous plastic flow of environment, are got. Depending on raising of task, scope condition, possibility to get the asymmetric distributing of contact tensions on length of hearth of deformation is rotined

Key words: reserved decision, contact tensions, asymmetry of lading, rolling.