

УДК 539.374.001.8

Д-р техн. наук В. В. Чигиринский, А. Н. Бень

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЛОЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Представлено решение плоской задачи в аналитическом виде для замкнутой системы уравнений теории пластичности с использованием вложенных гармонических функций. Показаны решения с использованием теории пластического течения. Проведен анализ решения задачи для простой упрочняющейся среды, который показывает, что распределение контактных напряжений определяется фактором формы очага деформации и величиной коэффициента трения.

**Ключевые слова:** напряжение, деформация, пластичность, гармонические функции, уравнение Лапласа.

### Введение

Основное количество известных решений в механике деформированного тела не позволяют рассматривать комплексное решение, связанное с определением одновременно как напряженного, так и деформированного состояния металла. Рассматриваются решения только для определения напряженного или деформированного состояния и при этом поля напряжений и деформаций чаще всего не связаны друг с другом. Это не позволяет получать аналитическим путем математическую модель пластической среды. Возникают проблемы, которые не позволяют получить однозначную связь полей напряжений и деформаций.

В этом плане ценным является то, что предложенные решения расширяют возможность удовлетворения граничных и очевидных условий, как по напряжениям, так и по деформациям в очаге деформации.

### Постановка задачи

В систему (1) включены уравнения теории течения: уравнения равновесия, условия пластичности, уравнения связи скоростей деформаций и напряжений, уравнения несжимаемости для скоростей деформаций, уравнения неразрывности скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2; \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = F_1; \\ \xi_x + \xi_y = 0; \\ \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{xy}}{\partial y \partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  – нормальные напряжения;  $\tau_{xy}$  – касательное напряжение;  $k$  – сопротивление пластической деформации на сдвиг (переменная величина);  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\dot{\gamma}_{xy}$  – скорости деформаций.

Граничные условия заданы в напряжениях [1]

$$\tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2\alpha)$$

или

$$\tau_n = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha \right). \quad (2)$$

Дополнительные условия заданы контактными удельными силами трения (2), изменяющимися по синусоидальному закону.

### Решение задачи

Граничное условие (2) будет тождественно удовлетворено, если принять

$$\tau_{xy} = k \cdot \sin A\Phi. \quad (3)$$

Рассматривается сложная зависимость от координат, при этом  $k = H_\sigma \cdot \exp \theta$ , где  $H_\sigma$  – переменный коэффициент, принимаемый в дальнейшем равным постоянной величине  $C_\sigma$ . Выражение (3) задает граничные условия (2), которые замыкают систему уравнений (1).

Ранее в работах [24] были предложены решения с использованием метода гармонических функций для определения поля напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y) + C; \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x) + C; \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \sin A\Phi \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{при условии } \theta_x = -A\Phi_y, \quad \theta_y = A\Phi_x. \quad (5)$$

Из последних соотношений Коши-Римана (5) следует, что вводимые в рассмотрение координатные функции  $A\Phi$  и  $\theta$  являются гармоническими, т. е. удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\begin{aligned}\theta_{xx} + \theta_{yy} &= 0, \\ A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} &= 0.\end{aligned}$$

Представляет интерес использование гармонических функций в решении. В работах [24] использовались следующие координатные гармонические функции:

$$\begin{aligned}A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y, \\ \theta &= -0,5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2), \\ A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y - AA_{13} \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - y^2), \\ \theta &= -0,5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2) + AA_{13} \cdot [0,25 \cdot (x^4 + y^4) - 1,5 \cdot x^2 \cdot y^2], \\ A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y + AA_{13} \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - y^2), \\ \theta &= -0,5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2) - AA_{13} \cdot [0,25 \cdot (x^4 + y^4) - 1,5 \cdot x^2 \cdot y^2].\end{aligned}\quad (6)$$

Представленные функции (6) являются гармоническими, удовлетворяющие уравнению Лапласа и соотношениям Коши-Римана. Вторая и третья группа функций представляют собой сумму гармонических координатных функций разного порядка.

Следует отметить, что произведения

$$\begin{aligned}\exp \theta \cdot \cos A\Phi, \\ \exp \theta \cdot \sin A\Phi\end{aligned}\quad (7)$$

также являются гармоническими функциями. Следовательно, в конструкцию функций  $A\Phi$  и  $\theta$  можно вложить новые построения типа (7) при условии, что аргументы функций будут гармоническими.

Рассмотрим аргумент тригонометрической функции в виде вложенной функции:

$$\Phi = [C_1 \cdot \exp \theta' + C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \sin A\Phi', \quad (8)$$

где  $A\Phi'$  и  $\theta'$  – вложенные координатные гармонические функции вида (6).

В случае (8) расширяется диапазон применения аналитических решений при удовлетворении граничных и очевидных условий в очаге деформации. Подставляя (8) в уравнение Лапласа получаем тождество:

$$\begin{aligned}A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} &= \sin A\Phi' \cdot \left\{ C_1 \cdot \exp \theta' \cdot \left[ (\theta')_{xx}^2 + (\theta')_{xx}^2 - (A\Phi')_{xx}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\theta')_{yy}^2 + (\theta')_{yy}^2 - (A\Phi')_{yy}^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - C_2 \cdot \exp(-\theta') \cdot \left[ (\theta')_{xx} - (\theta')_{xx}^2 + (A\Phi')_{xx}^2 + (\theta')_{yy} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\theta')_{yy}^2 + (A\Phi')_{yy}^2 \right] \right\} + \\ &\quad + \cos A\Phi' \cdot \left\{ C_1 \cdot \exp \theta' \cdot \left[ 2 \cdot (\theta')_{xx} \cdot (A\Phi')_{xx} + (A\Phi')_{xx} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cdot (\theta')_{yy} \cdot (A\Phi')_{yy} + (A\Phi')_{yy} \right] - \right. \\ &\quad \left. - C_2 \cdot \exp(-\theta') \cdot \left[ 2 \cdot (\theta')_{xx} \cdot (A\Phi')_{xx} - (A\Phi')_{xx} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cdot (\theta')_{yy} \cdot (A\Phi')_{yy} - (A\Phi')_{yy} \right] \right\} = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Уравнение (9) тождественно равно нулю, если выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю и если вложенные гармонические функции соответствуют условию Коши-Римана:

$$\begin{aligned}\theta'_x &= -A\Phi'_y, \\ \theta'_y &= A\Phi'_x.\end{aligned}$$

Через соотношения Коши-Римана определяем значение функции  $\theta'$ :

$$\theta = [C_1 \cdot \exp \theta' - C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \cos A\Phi'. \quad (10)$$

### Анализ полученных результатов

С использованием вложенных гармонических функций на примере осадки покажем, что существует область устойчивых решений для компонентов тензора напряжений как на контактной поверхности, так и во всем объеме.

Интегрируя уравнения равновесия (1) с учетом гармонических функций (8), (10), получим выражения для определения компонентов напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp \left\{ [C_1 \cdot \exp \theta' - C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \cos A\Phi' \right\} \cdot \cos \left\{ [C_1 \cdot \exp \theta' + C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \sin A\Phi' \right\} + \sigma_0 + C; \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp \left\{ [C_1 \cdot \exp \theta' - C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \cos A\Phi' \right\} \cdot \cos \left\{ [C_1 \cdot \exp \theta' + C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \sin A\Phi' \right\} + \sigma_0 + C; \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp \left\{ [C_1 \cdot \exp \theta' - C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \cos A\Phi' \right\} \cdot \sin \left\{ [C_1 \cdot \exp \theta' + C_2 \cdot \exp(-\theta')] \cdot \sin A\Phi' \right\}.\end{aligned}$$

Последние выражения могут быть упрощены, приняв  $C_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi') \cdot \cos(C_1 \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi') + \sigma_0 + C; \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi') \cdot \cos(C_1 \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi') + \sigma_0 + C; \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi') \cdot \sin(C_1 \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi').\end{aligned}\quad (11)$$

При этом вложенные гармонические функции  $A\Phi'$  и  $\theta'$  имеют вид:

$$A\Phi' = AA_6 \cdot x \cdot y;$$

$$\theta' = -0,5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2),$$

где  $AA_6$  – постоянная величина.

Постоянные интегрирования и функции определены из граничных очевидных условий:

$$C_1 = \frac{A\Phi_0}{\exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0};$$

$$A\Phi'_0 = AA_6 \cdot \frac{L \cdot H}{4};$$

$$\theta'_0 = -0,5 \cdot AA_6 \cdot \left( \frac{L^2}{4} - \frac{H^2}{4} \right).$$

Подставляя граничные условия для осадки, выраженные через напряжения, получим:

$$AA_6 = \frac{4}{L \cdot H} \cdot \arctg(A\Phi_0),$$

где  $L$ ,  $H$  – длина и высота очага деформации;  $f$  – коэффициент трения.

Из условия пластичности  $\sigma_0 = -2 \cdot k \cdot \cos A\Phi$ ,  $C = k_0$ . Подставляя в (11) компоненты тензора напряжений, имеем

$$\sigma_x = -C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0) \times$$

$$\times \frac{\exp[C \cdot (\exp \theta' \cdot \cos A\Phi' - \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0)]}{\cos(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \sin A\Phi'_0)} \times$$

$$\times \cos(C \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi') + C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0);$$

$$\sigma_y = -3 \cdot C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0) \times$$

$$\times \frac{\exp[C \cdot (\exp \theta' \cdot \cos A\Phi' - \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0)]}{\cos(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \sin A\Phi'_0)} \times$$

$$\times \cos(C \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi') + C_\sigma \times$$

$$\times \exp(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0);$$

$$\tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0) \times$$

$$\times \frac{\exp[C \cdot (\exp \theta' \cdot \cos A\Phi' - \exp \theta'_0 \cdot \cos A\Phi'_0)]}{\cos(C \cdot \exp \theta'_0 \cdot \sin A\Phi'_0)} \times$$

$$\times \sin(C \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi'). \quad (12)$$

Для определения значения  $A\Phi_0$  проведем сопоставление с решениями, представленными в работе [5]. В нашем случае имеем:

$$A\Phi_0 = \arctg \psi.$$

Анализ показывает, что  $\psi$  является параметром, который учитывает влияние контактного трения и в некоторой степени фактора формы. Определим значение  $\psi$  с учетом данных, представленных на графике в работе [5], рис. 1.

Имея математическую модель (12), в которую входит постоянная  $AA_6$  в зависимости от  $A\Phi_0$ , можно получить обратным пересчетом те значения  $\psi$ , которые соответствуют коэффициентам подпора, представленным на рис. 1.

В табл. 1 представлены значения  $\psi$  решения (12) в соответствии с рис. 1.

По результатам пересчета были построены графики зависимости коэффициента  $\psi$  от коэффициента трения и фактора формы (рис. 2).

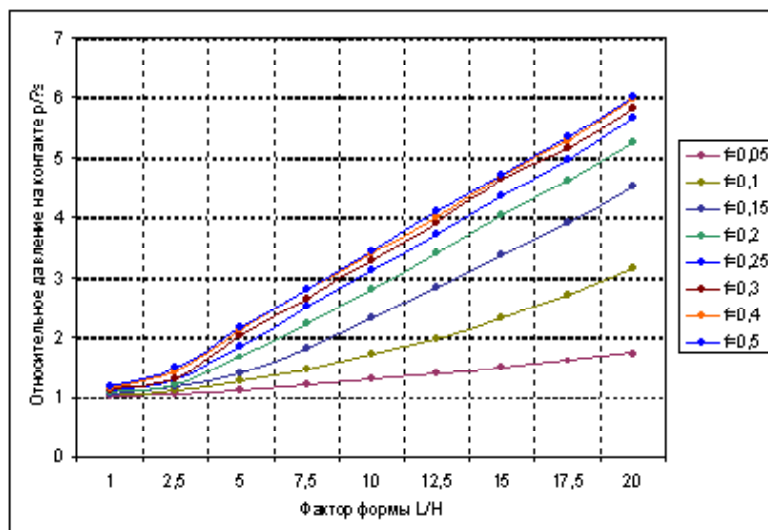


Рис. 1. Относительное давление на контакте в зависимости от коэффициента трения и фактора формы по Сторожеву [5]

**Таблица 1** – Значения коэффициента  $\psi$  в зависимости от коэффициента трения и фактора формы

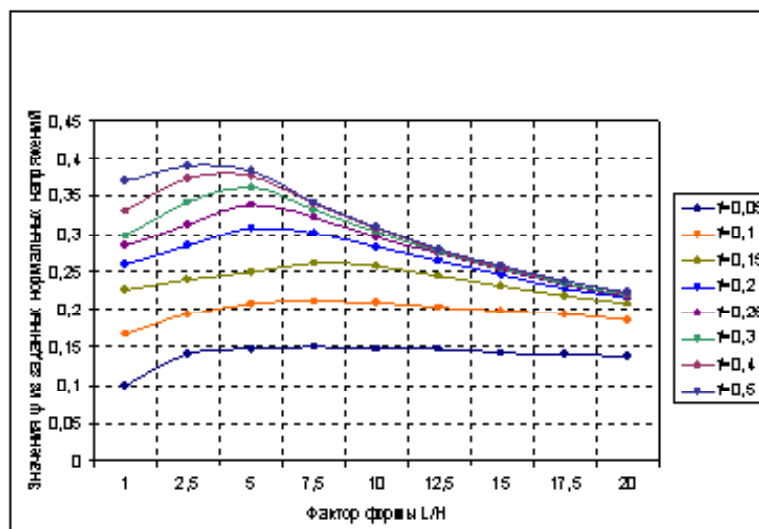
Фактор формы $L/H$	Коэффициент трения $f$							
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
1	0,1	0,167	0,227	0,259	0,285	0,298	0,331	0,37
2,5	0,14	0,194	0,24	0,284	0,312	0,343	0,374	0,39
5	0,147	0,209	0,25	0,307	0,339	0,363	0,377	0,383
7,5	0,15	0,212	0,261	0,301	0,323	0,332	0,341	0,343
10	0,147	0,21	0,258	0,283	0,296	0,302	0,307	0,31
12,5	0,148	0,203	0,245	0,264	0,274	0,277	0,278	0,28
15	0,142	0,198	0,232	0,246	0,253	0,254	0,257	0,258
17,5	0,141	0,193	0,219	0,229	0,234	0,235	0,238	0,238
20	0,137	0,186	0,208	0,216	0,219	0,22	0,221	0,223

Данными расчетами фактически были определены граничные условия для определения постоянных величин, присутствующих в решении (12). Этим самым определена область допустимых значений, позволяющая рассчитать реальные значения коэффициентов подпора на контакте в условиях плоскодеформированного состояния. Результаты расчета по формулам (12) с учетом определенного коэффициента подпора  $\psi$  приведены на рис. 3. Анализ графических зависимостей показывает, что распределение контактных напряжений реагирует на фактор формы очага деформации и коэффициент трения. Полученные результаты качественно и количественно отражают общие закономерности распределения полей тензора напряжений по всему очагу деформации и в полной мере удовлетворяют граничным условиям. Результаты расчетов совпадают с реальными эпюрами контактных напряжений. Следует подчеркнуть, что полученные вы-

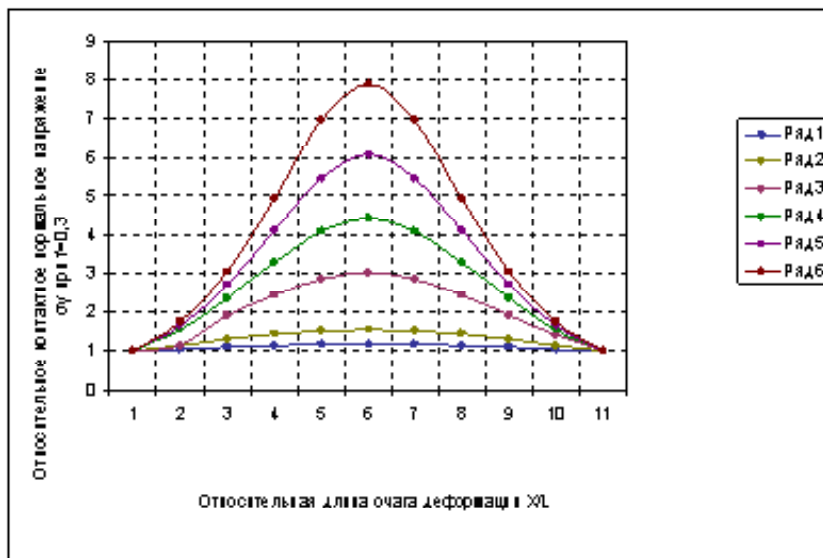
ражения едины для всего очага деформации и нет необходимости разбивать его на отдельные зоны контактного трения.

### Выводы

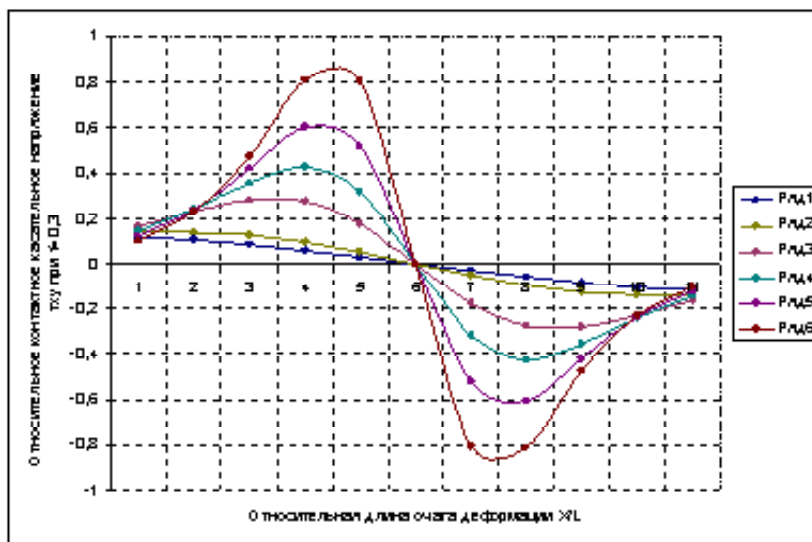
1. Возможно построение гармонических функций вида  $\exp\theta \cdot \cos A\Phi$  и  $\exp\theta \cdot \sin A\Phi$  при условии, что их аргументы также являются гармоническими функциями.
2. Аргументы функций  $A\Phi$  и  $\theta$  могут использовать построения вида  $\exp\theta' \cdot \cos A\Phi'$  и  $\exp\theta' \cdot \sin A\Phi'$ , т. к. они тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа при условии  $\theta'_x = -A\Phi'_y$ ,  $\theta'_y = A\Phi'_x$ .
3. Получены выражения для компонентов тензора напряжений с использованием вложенных гармонических функций.

**Рис. 2.** Зависимость коэффициента  $\psi$  от коэффициента трения и фактора формы

4. Определена область допустимых значений для определения контактных напряжений с использованием общепринятых данных работы [5].
5. Расчет напряжений показывает, что они качественно и количественно соответствуют экспериментальным данным.



a



b

Рис. 3. Распределение нормальных (a) и касательных (б) напряжений по высоте полосы при осадке  $f = 0,3$ ,  $L/H=1...12,5$

**Список литературы**

1. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.
2. A Generalised Theory of Plasticity / [V. V. Chygyrny's'kyu, A. Ya. Kachan, I. Mamuzik, A. N. Ben'] // Materials and Technology. Institute of Metals and Technology – Ljubljana, Slovenija. – POB 431. – 2010. – P. 141–145.
3. Чигиринский В. В. Обобщенная теория пластичности. Модель сложной пластической среды / В. В. Чигиринский, А. Я. Качан, А. Н. Бень // Вестник национального технического университета Украины. Политехнический институт. – Киев, 2008. – С. 141–148.

4. Чигиринский В. В. Некоторые особенности обобщенной теории пластичности для упрочняющейся среды / В. В. Чигиринский, А. Н. Бень // Вестник двигателестроения. — 2008. — № 2. — С. 8–12.
5. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. — М. : Машиностроение, 1977. — 424 с.

*Поступила в редакцию 30.08.2011*

**Чигиринський В.В., Бень А. Н. Дослідження напруженого стану з використанням вкладених гармонійних функцій в умовах плоскої деформації**

*Представлено рішення плоскої задачі в аналітичному вигляді для замкненої системи рівнянь теорії пластичності з використанням вкладених гармонійних функцій. Показано рішення з використанням теорії пластичного плину. Проведено аналіз рішення задачі для простого середовища, що зміцнюється, який показує, що розподіл контактних напружень визначається фактором форми осередку деформації та величиною коефіцієнту тертя.*

**Ключові слова:** напруження, деформація, пластичність, гармонійні функції, рівняння Лапласа.

**Chygyrns'kyu V., Ben' A. Research of the stress state with using of the enclosed harmonious functions in the flat deformation conditions**

*There is presented the solution of plane problem in analytical form for closed system of equation of the theory of plasticity with using enclosed harmonious functions. There are shown decisions with using of the theory of a plastic current. There is passed the analysis of the decision of a problem for the simple strengthened environment which shows is passed that distribution of contact pressure is defined by the factor of the form of the centre of deformation and size of factor of a friction.*

**Key words:** stress, deformation, plasticity, harmonious functions, Laplas equation.