УДК 539.3

В.И. Ершов, З.Г. Ершова

Тутаевский филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А.Соловьева», Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Исследуются низкочастотные колебания оболочек вращения, имеющих два края. На одном краю задаются различные варианты граничных условий. Другой край жестко соединен с плоским упругим кольцом постоянного поперечного сечения. Асимптотическим методом исследуется зависимость низших частот от вида граничных условий на одном краю и от размеров поперечного сечения кольца. Построен итерационный процесс удовлетворения граничных условий и вычисления частоты. Для некоторых случаев получены явные формулы наинизшей частоты колебаний. Результаты исследований могут быть полезны при прочностном анализе конструкций, в состав которых входят оболочки вращения.

Ключевые слова: *оболочка вращения, низкочастотные колебания, параметр частоты, форма колебаний.*

Введение

Современная техника в широких масштабах использует тонкие упругие оболочки. Конструкции, в которые входят оболочки, находят большое применение в строительстве, приборостроении и других областях. Такие конструкции могут находиться в различных условиях, в частности под воздействием динамических нагрузок. Поэтому актуальным является расчет частот собственных колебаний оболочек, т.к. знание этих характеристик позволит избежать явления резонанса. В настоящей статье рассматриваются свободные низкочастотные колебания оболочек вращения имеющих два края. На одном краю задаются различные варианты идеализированных граничных условий, допускающих тангенциальные возможные изгибания срединной поверхности оболочки. Другой край жестко соединен с плоским упругим кольцом. Исследуется зависимость низших частот от вида граничных условий на одном краю и от размеров поперечного сечения кольца.

1. Постановка задачи

Исследование колебаний оболочечной конструкции будем проводить при следующих условиях: кольцо не является тонкостенным, поперечное сечение кольца имеет две оси симметрии и одна из этих осей лежит в плоскости кольца, центр тяжести поперечного сечения совпадает с центром изгиба, поперечное сечение кольца не деформируется при его нагружении. В дальнейшем будем рассматривать такие кольца, поперечное сечение которых имеет форму прямоугольника.

Уравнения колебаний кольца, соединенного с оболочкой в случае ортогонального подкрепления возьмем в виде [1].

$$\begin{aligned}
&-\frac{E_k F_k}{R_k^2}\left(mv_k + w_k\right) - \frac{E_k Y_1 m^2}{R_k^4}\left(mw_k + v_k\right) - \\
&-\left(S_1 + \frac{H}{R_2}\right) + \rho_k F_k p^2 v_k = 0 \\[2ex]
&-\frac{E_k Y_2 m^2}{R_k^3}\left(\frac{m^2}{R_k}u_k - \gamma_k\right) + \frac{G_k Y_k m^2}{R_k^3}\left(\gamma_k - \frac{u_k}{R_k}\right) - \\
&-T_1 + \frac{mb_*}{2R_k}\left(S_1 + \frac{H}{R_2}\right) + \rho_k F_k p^2 u_k = 0 \\[2ex]
&-\frac{E_k Y_1 m^3}{R_k^4}\left(mw_k + v_k\right) - \frac{E_k F_k}{R_k^2}\left(mv_k + w_k\right) + \\
&+\left(N_1 - \frac{mH}{B}\right) + \rho_k F_k p^2 w_k = 0 \\[2ex]
&-\frac{G_k Y_k m^2}{R_k^2}\left(\gamma_k - \frac{u_k}{R_k}\right) + \frac{E_k Y_2}{R_k^2}\left(\frac{m^2}{R_k}u_k - \gamma_k\right) - \\
&-M_1 + \frac{b_*}{2}\left(N_1 - \frac{mH}{B}\right) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

где u_k, v_k, w_k - перемещения центра тяжести поперечного сечения кольца, γ_k - угол закручивания поперечного сечения кольца, E_k, G_k - модули Юнга и сдвига материала кольца, F_k - площадь поперечного сечения кольца, Y_1, Y_2 - осевые моменты инерции сечения кольца, Y_k - моменты инерции поперечного сечения кольца при кручении, R_k - радиус срединной линии кольца, ρ_k - плотность материала кольца, *m* - число волн в окружном направлении, b_*, a_* - высота и ширина поперечного сечения кольца, B - расстояние от срединной поверхности оболочки до оси вращения, T_1, S_1, N_2 - тангенциальные и перерезывающее усилие в оболочке, M_1 - изгибающий момент, H - момент кручения, p - частота собственных колебаний оболочки.

Уравнения (1) можно рассматривать в качестве граничных условий, соответствующих соединению оболочки с кольцом.

Исследуем зависимость частоты колебаний от вида граничных условий на одном краю и от размеров поперечного сечения кольца.

Представим размеры поперечного сечения кольца в виде

$$a_* = a_k h^a, b_* = b_k h^b, \tag{2}$$

где h – относительная толщина оболочки (величину h – можно считать малым параметром).

Область изменения параметров ограничивается следующими неравенствами

$$0 \angle a \le 1, \quad 0 \angle b \le 1, \tag{3}$$

а исследование зависимости частоты от размеров поперечного сечения кольца сведем к исследованию зависимости от двух параметров a и b, удовлетворяющих неравенствам (3). Для проведения асимптотического анализа предлагается два метода последовательных приближений. Для относительно тонких колец определяющей является деформация оболочки, а кольцо рассматривается как возмущающий объект. Для относительно толстых колец наоборот – определяющей является деформация кольца, а оболочка рассматривается как возмущающий объект.

Введем в рассмотрение параметр частоты λ, которой связан с круговой частотой p следующим соотношениям

$$\lambda = \rho\left(1 - v^2\right)p^2 E^{-1} \tag{4}$$

где ρ - плотность, E - модуль Юнга, v - коэффициент Пуассона, материала оболочки.

Параметр частоты колебаний будем определять по формуле Рэлея [2].

$$\lambda = \frac{1}{T}\left[\Pi_E + \frac{L^2}{12}\Pi_x - \frac{(1-v^2)}{Eh}\left(L_2 - L_1\right)\right] \tag{5}$$

где $\Pi_E \Pi_x$ – пропорциональны потенциальным энергиям растяжения-сжатия и изгиба-кручения оболочки, величины T и L пропорциональны кинетической энергии оболочки и работе краевых сил и моментов.

В работе изучается сверхнизкие частоты. Оболочка будет колебаться с такими частотами, если форма колебании близка к чистому изгибу [2].

2. Низкочастотные колебания подкрепленных оболочек с граничными условиями шарнирного опирания

На одном краю оболочки выполнены условия шарнирного опирания.

$$T_1 = v_1 = w_1 = M_1 = 0 \tag{6}$$

где v, w – проекции смещения точек срединной поверхности оболочки на направления параллели и внутренней нормали. Для определения частоты по формуле (5) необходимо задать форму колебаний. Причем эта форма должна удовлетворять граничным условиям и уравнениям движения оболочки.

В основу расчета положим метод расчленения. Полное напряженное состояние представляется в виде суммы основного напряженного состояния, распространяющегося на всю оболочку, и краевых эффектов, возникающих вблизи краев оболочки [3].

Метод расчленения характеризуется и тем, что для каждого из напряженных состояний выделяются свои граничным условия.

Для граничных условий (6) расчленение является тривиальным. Для основного напряженного состояния первые два, для краевого эффекта последние два уравнения в (6).

Для граничных условий, соответствующих подкреплению оболочки кольцом, такого естественного разделения провести нельзя. Однако это можно сделать, если построить линейные комбинации этих условий. Комбинации граничных условий берем в следующем виде

$$\frac{E_k Y_1 m^2\left(m^2 - 1\right)\left(m w_k + v_k\right)}{R_k^4} - S_1 + m N_1 +$$
$$+\rho_k F_k p^2\left(v_k + m w_k + \frac{m b_*}{2}\gamma_k\right) = 0$$

$$-\frac{G_k Y_k m^2 \left(m^2-1\right)}{R_{k^3}}\left(\gamma_k-\frac{u_k}{R_k}\right)-T_1-\frac{m^2}{R_k}M_1+$$
$$+\frac{mb_*}{2R_k}\left(S_1+mN_1\right)+\rho_k F\ p^2 u_k=0 \qquad (7)$$

$$-\frac{E_k Y_1 m^3\left(mw_k+v_k\right)}{R_k{}^4}+\frac{E_k F_k\left(mv_k+w_k\right)}{R_k^2}-$$
$$-N_1+\rho_k F_k p^2\left(w_k+\frac{b_*}{2}\gamma_k\right)=0$$

$$-\frac{G_k Y_k m^2}{R_{k^2}}\left(\gamma_k-\frac{u_k}{R_k}\right)+\frac{E_k Y_2}{R_{k^2}}\left(\frac{m^2}{R_k}u_k-\gamma_k\right)=$$
$$=M_1+\frac{b_*}{2}N_1=0$$

$$-\frac{E_k F_k}{R_k^2}\left(mv_k+w_k\right)-\frac{E_k Y_1 m^2}{R_k^4}\left(mw_k+v_k\right)-$$
$$-\left(S_1+\frac{M}{R_2}\right)+\rho_k F_k p^2 v_k=0$$

Первые два условия являются основными, а последние два – дополнительными. На основе (6) и (7) строится следующий итерационный процесс удовлетворения граничных условий. Интегралы чистого изгиба удовлетворяют в нулевом приближении основным граничным условиям.

В дополнительных граничных условиях возникают невязки. Их снимаем, вводя в рассмотрение интегралы краевого эффекта. Для удовлетворения остальных условий в первом приближении вводим в рассмотрение безмоментные интегралы. После этого определяем частоту по формуле (5).

Формулу для параметра частоты можно представить в следующем виде

$$\lambda=\frac{\Pi_{об}+\Pi_{ко}}{T_{об}+T_{ко}} \qquad (8)$$

где $\Pi_{об}$, $\Pi_{ко}$, $T_{об}$, $T_{ко}$ - пропорциональны потенциальным энергиям деформации оболочки, кольца и кинетическим энергиям оболочки и кольца.

В зависимости от размеров поперечного сечения кольца требуется учитывать те или иные величины в формуле (8).

В частности, при вычислении параметра частоты с точностью $O\left(h^{0,5}\right)$ для кольца квадратного поперечного сечения при $a>0,75$ можно пренебречь полностью влиянием кольца. При $0,5<a\le 0,75$ следует учитывать кинетическую энергию кольца. При $0,375<a<0,5$ следует учитывать и потенциальную энергию деформацию кольца.

При $a\le 0,375$ метод определения частоты, когда определяющей является деформация оболочки, не пригоден. В этом случае деформация кольца является определяющей, а оболочка рассматривается как возмущающий объект.

Частоты колебаний системы оболочка-кольцо (для относительно толстого кольца) будут низкими, если форма колебания кольца близка к линейной комбинации колебаний изгиба кольца в своей плоскости и колебаний изгиба из плоскости и кручения. При $0,25\le a\le 0,375$ учитывается влияние оболочки. При $a\le 0,375$ влиянием оболочки можно пренебречь.

В качестве примера рассмотрим колебания цилиндрической оболочки, один край которой шарнирно оперт, а другой подкреплен упругим плоским кольцом квадратного поперечного сечения со стороной a_*. В таблице приведены численные результаты для цилиндрической оболочки с параметрами $B=1,l=1,h=0,0025$.

Таблица

a_*	0,05	0,0235	0,0112
λ	0,00099	0,00013	0,000015
λ_1	0,00102	0,00012	0,000014

Значения λ вычислены по вышеописанной методике, а значения λ_1 получены численным интегрированием уравнений колебаний.

Заключение

Проанализировано влияние параметров кольца на частоты колебаний оболочечной конструкции при шарнирном закреплении одного из краев. По аналогичной методике можно исследовать влияние других идеализированных граничных условий.

Литература

1. Кармишин А.В. Статика и динамика оболочечных конструкции [Текст] / А.В. Кармишин, В.И. Мяченков. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

2. Асимтотические методы в механике тонкостенных конструкций [Текст] / П.Е. Товстик,

С.М.Бауэр, А.Л.Смирнов, С.Б. Филиппов.– СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. – 188 с.

3. Михасев Г.И., Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимпточиские методы [Текст] / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 292 с.

Поступила в редакцию 01.06.2012

В.І.Єршов, З.Г.Єршова. Дослідження коливань підкріплених оболонок

Досліджуються низькочастотні коливання оболонок обертання, що мають два краї. На одному краю задаються різні варіанти граничних умов, інший край жорстко сполучений з плоским пружним кільцем постійного поперечного перетину. Асимптотичним методом досліджується залежність нижчих частот від виду граничних умов на одному краю і від розмірів поперечного перетину кільця. Побудований ітераційний процес задоволення граничних умов і обчислювання частоти. Для деяких випадків отримані явні формули найнижчої частоти коливань. Результати досліджень можуть бути корисні при аналізі на міцність конструкцій, до складу яких входять оболонки обертання.

***Ключові слова**: оболонка обертання, низькочастотні коливання, параметр частоти, форма коливань.*

V.I. Ershov, Z.G. Ershova. Investigation of oscillations reinforced shells

Low frequency oscillations of shells of revolution with two boundaries are considered. Various boundary conditions are specified for one boundary. The other boundary is rigidly connected with flexible planar annulus of a constant cross-section. The dependence of low frequencies on the form of boundary conditions at one boundary and the size of the annulus cross-section at the other boundary is investigated by an asymptotical method. An iterative algorithm is designed for satisfaction of boundary conditions and computation of frequency. Explicit formulas for the lowest frequency of oscillations are obtained for some particular cases. The results of the paper can be useful in the strength analysis of constructions that contain shells of revolution.

***Key words**: shell of revolution, low frequency oscillations, frequency parameter, oscillation form.*