

УДК 539.3

Канд. техн. наук Л. Н. Егармина

Запорожская государственная инженерная академия, г. Запорожье

## ЭВОЛЮЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ

Показаны решения уточненных динамических уравнений изгиба балки на примере перемещения  $W$  [1]. Приведены графики эволюции данного перемещения при распространении нестационарных волн в конструкции прямоугольного сечения при ее изгибе. В отличие от известных ранее уравнений [2], скорости распространения фронтов продольных и поперечных волн совпадают со скоростями аналогичных волн в теории упругости.

**Ключевые слова:** асимптотико-групповой анализ, уточненные динамические уравнения изгиба балки, квазифронт, перемещения, изгибная волна.

### Введение

Уравнения динамики стержней получаются обычно на основе каких-то предположений о характере распределения искомым величин – напряжений и деформаций по поперечному сечению стержня [3]. Метод асимптотико-группового анализа позволяет подходить к исследованию без опоры на общепринятые гипотезы, получая в результате новые модели динамики способные учитывать некоторые дополнительные, и зачастую не менее важные, факторы, которые не учитываются в классических случаях [4–6]. Например, поперечные колебания стержня, возникающие при движении продольной волны. Для случая изгиба стержня этим методом из трехмерных уравнений теории упругости были получены асимптотически обоснованные уточненные одномерные динамические уравнения изгиба стержня, позволяющие учитывать как известные в изгибе балки эффекты, так и некоторые новые [1]. В данной работе показано решение этих уравнений, на примере исследования перемещения  $W$  во время распространения нестационарных волн по стержню прямоугольного сечения при его изгибе.

### Решение найденных уточненных динамических уравнений изгиба балки

В работе [1] изложена процедура получения уточненных динамических уравнений изгиба балки на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, неминимальное упрощение трехмерных уравнений, приводящее к одномерным уравнениям.

Данные уравнения в однородном случае, отвечающем отсутствию нагрузок на боковых поверхностях балки, будут иметь вид:

$$\partial_x^2 \varphi + c \partial_x W + c \partial_x V - 8a_s^2 (\partial_x w + \varphi) - \partial_t^2 \varphi = 0;$$

$$a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \varphi + W + cV - \partial_t^2 w = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi + 24(W + cV) + \partial_t^2 W = 0;$$

$$8(V + c \partial_x \varphi + cW) + \varepsilon \partial_t^2 V = 0;$$

$$Q = \partial_x w + \varphi; \quad M = \partial_x \varphi + cW + cV;$$

$$N = W + c \partial_x \varphi + cV; \quad K = V + c \partial_x \varphi + cW. \quad (1)$$

Дополнительный анализ этих уравнений дает новое упрощение [7]:

$$\partial_x^2 \varphi - \partial_t^2 \varphi = 0; \quad a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \varphi - \partial_t^2 w = 0;$$

$$8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi + \partial_t^2 W = 0; \quad 8c \partial_x \varphi + \varepsilon \partial_t^2 V = 0;$$

$$Q = \partial_x w + \varphi; \quad M = \partial_x \varphi; \quad N = c \partial_x \varphi; \quad K = c \partial_x \varphi. \quad (2)$$

Оно отвечает быстрым изменениям по  $x$  и по  $t$ , что в свою очередь говорит о больших значениях дифференциальных операторов  $\partial_x$  и  $\partial_t$ . В этих условиях результаты, получаемые в первом приближении, нуждаются в уточнениях, достигаемых путем построения процедур последовательных приближений.

Представим искомые функции в виде рядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i, \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, \quad V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i, \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i, \quad K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i. \quad (3)$$

Упрощенные уравнения (2) порождают бесконечную рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \varphi_i + c \partial_x W_i + c \partial_x V_{i-1} - 8a_s^2 (\partial_x w_i + \varphi_{i-1}) - \partial_i^2 \varphi_i &= 0; \\ 8a_s^2 \partial_x^2 w_i + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \varphi_{i-1} + 24(W_{i-1} + cV_{i-2}) + \partial_i^2 W_i &= 0; \\ 8(V_{i-1} + c \partial_x \varphi_i + cW_i) + \varepsilon \partial_i^2 V_i &= 0; \\ Q_i = \partial_x w_i + \varphi_{i-1}, M_i = \partial_x \varphi_i + c(W_i + V_{i-1}); \\ N_i = W_i + c(\partial_x \varphi_i + V_{i-1}), K_i = V_{i-1} + c(\partial_x \varphi_i + W_i) \quad (i=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

Картина изменения поперечного сечения балки при изгибе схематически будет выглядеть, как показано на рисунке 1.

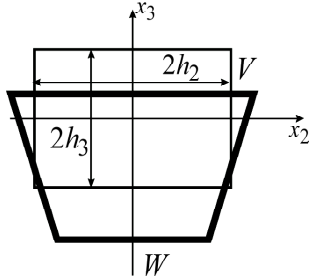


Рис. 1. Перемещения \$V\$ и \$W\$, которые вызываются действием на балку неклассических видов напряжений \$\sigma\_{22}\$ и \$\sigma\_{23}\$. Поперечное сечение

Сфокусируемся в данной статье на поиске решений только непосредственно для перемещений. Аналогично можно найти решения для всех без исключения неизвестных системы, однако это не является целью данного исследования. Итак, решения этих уравнений будем разыскивать в виде:

$$w_i = \sum_{j=2}^i w_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i w_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1};$$

$$W_i = \sum_{j=2}^i W_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i W_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1};$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^i \varphi_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i \varphi_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j};$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i V_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j+1} + \sum_{j=1}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j+1}. \quad (5)$$

После подстановки решений (5) в рекуррентные уравнения (4) будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j-1}^1 &= \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \{ (i-j+2)(i-j+1)\varphi_{i,j-2}^1 + \\ &+ c[(i-j+1)W_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2)W_{i-1,j-1}^1 + \\ &+ (i-j+1)V_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2)V_{i-1,j-1}^1] - 8a_s^2 [(i-j+1)w_{i-1,j-2}^1 - \\ &- (\gamma+i+j-2)w_{i-1,j-1}^1 + \varphi_{i-1,j-1}^1] \}, \quad (i=2, 3, \dots; j=2, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\varphi_{i,j}^2 = \frac{1}{(a_s^2-1)(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)} \{ (i-j+2)(i-j+1)\varphi_{i,j-2}^2 -$$

$$\begin{aligned} -2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)\varphi_{i,j-1}^2 + c[(i-j+1)(W_{i-1,j-2}^2 + V_{i-1,j-2}^2) - \\ - (\gamma+i+j-2)(W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2)] - 8a_s^2 [(i-j+1)w_{i-1,j-2}^2 - \\ - (\gamma+i+j-2)w_{i-1,j-1}^2 + \varphi_{i-1,j-1}^2] \}, \quad (i=2, 3, \dots; j=2, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{ij}^1 &= \frac{1}{(1-a_s^2)(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{ a_s^2 (i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^1 - \\ - 2a_s^2 (i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^1 + (a_s^2+c)[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - \\ - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1] + W_{i-1,j-1}^1 + cV_{i-1,j-1}^1 \}, \quad (i=1, 2, \dots; j=1, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{i,j-1}^2 &= \frac{1}{2a_s^2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)} \{ a_s^2 (i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2 + \\ + (a_s^2+c)[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2] + W_{i-1,j-1}^2 + cV_{i-1,j-1}^2 \}, \\ (i=2, 3, \dots; j=2, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{ij}^1 &= -\frac{1}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{ 8a_s^2 [(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^1 - \\ - 2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^1 + (\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)w_{ij}^1] + \\ + (8a_s^2+24c) [(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1] + 24(W_{i-1,j-1}^1 + \\ + cV_{i-1,j-1}^1) \}, \quad (i=1, 2, \dots; j=1, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{ij}^2 &= -\frac{1}{a_s^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{ 8a_s^2 [(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2 - \\ - 2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^2 + (\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)w_{ij}^2] + \\ + (8a_s^2+24c) [(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2] + 24(W_{i-1,j-1}^2 + \\ + cV_{i-1,j-1}^2) \}, \quad (i=1, 2, \dots; j=1, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^1 &= -\frac{8}{\varepsilon(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{ V_{i-1,j-1}^1 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^1 - \\ - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^1] + cW_{i-1,j-1}^1 \}, \quad (i=1, 2, \dots; j=1, \dots, i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^2 &= -\frac{8}{\varepsilon a_s^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{ V_{i-1,j-1}^2 + c[(i-j+1)\varphi_{i,j-1}^2 - \\ - (\gamma+i+j-1)\varphi_{ij}^2] + cW_{i-1,j-1}^2 \}, \quad (i=2, 3, \dots; j=2, \dots, i). \quad (6) \end{aligned}$$

Выражения вида \$t-x\$ в (5) определены при \$x \le t\$ и равны нулю при \$x > t\$; выражения вида \$a\_s t-x\$ определены при \$x \le a\_s t\$ и равны нулю при \$x > a\_s t\$. Необходимо не забывать, что коэффициенты сумм (4) определены при значениях \$j\$, заданных в записях соответствующих сумм. Если индекс выходит за указанные пределы, то коэффициенты считаются равными нулю.

Рекуррентные соотношения (6) не позволяют находить коэффициенты вида \$\varphi\_{ii}^1\$ и \$w\_{ii}^2\$. В работе [7] подробно описана логическая цепочка, приводящая к соответственным формулам:

$$\varphi_{ii}^1 = \frac{1}{\gamma + 2i - 1} \left\{ \varphi_{i,i-1}^1 + c(W_{i-1,i-1}^1 + V_{i-1,i-1}^1) - f_i + \right. \\ \left. + a_s^{\gamma+2(i-1)} \left[ \varphi_{i,i-1}^2 - (\gamma + 2i - 1)\varphi_{ii}^2 + c(W_{i-1,i-1}^2 + V_{i-1,i-1}^2) \right] \right\}, \\ (i = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Для случая внезапно приложенного в момент времени  $t = 0$  и остающегося в дальнейшем постоянным момента  $M(0, t) = 1$  будет:

$$w_{ii}^2 = -\frac{w_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i}} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Кроме заданного изгибающего момента на торце балки может быть задан также прогиб (шарнирная опора) либо перерезывающая сила (свободный торец). Тогда, имеем:

$$w_{ii}^2 = \frac{1}{\gamma + 2i} \left[ \frac{w_{i,i-1}^1 - (\gamma + 2i)w_{ii}^1 + \varphi_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i-1}} + w_{i,i-1}^2 + \varphi_{ii}^2 \right] \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Таким образом, мы имеем возможность доводить решение до конца и получать наглядное представление о происходящих процессах.

На рис. 2, 3 приведены соответствующие графические результаты. Изображены графики пе-

ремещения как функции  $x$  для моментов времени  $\tau = 3$  и  $\tau = 6$ . Следует подчеркнуть в этом случае роль второго фронта. В соответствии с приложенной нагрузкой главным здесь является первый фронт — фронт продольных волн, однако в его близи мы получили незначительные изменения. Зато в зоне второго фронта наблюдается резкое увеличение значений, после чего достаточно быстро происходит переход к известным классическим результатам.

### Выводы

Исследование распространения нестационарного волнового возмущения в балке при воздействии внезапно приложенного изгибающего момента на основе предлагаемых уточненных уравнений показало, что картина возмущения хорошо соответствует трехмерным уравнениям теории упругости. В частности, возмущение имеет два фронта — продольных и поперечных волн, причем скорости этих фронтов совпадают со скоростями таких же фронтов в теории упругости.

### Список литературы

1. Шамровский А. Д. Уточненные динамические уравнения изгиба балки с учетом трехмерной картины напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении балки / Шамровский А. Д., Егармина Л. Н. //

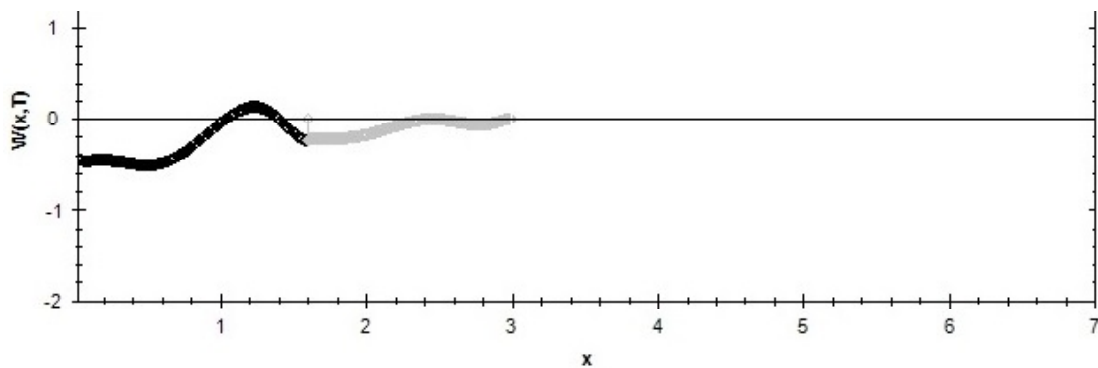


Рис. 2. Эволюция перемещения  $W$  для квадратного поперечного сечения стержня при внезапно приложенном изгибающем моменте  $M(x, \tau)$  (безразмерное время  $\tau = 3$ )

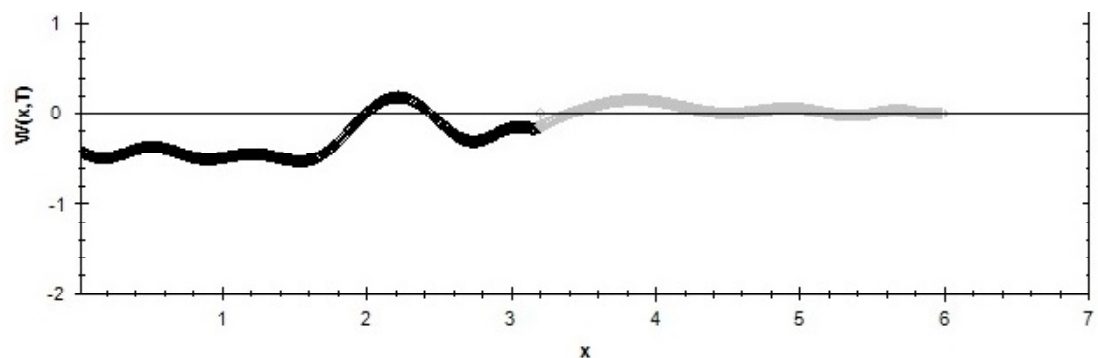


Рис. 3. Эволюция перемещения  $W$  для квадратного поперечного сечения стержня при внезапно приложенном изгибающем моменте  $M(x, \tau)$  (безразмерное время  $\tau = 6$ )

- Сб. научн. тр. по матер. междунар. научн.- практич. конф. «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании-2010». Том 5. Технические науки. – Одесса : Черноморье, 2010. – С. 28–37.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко – М. : Наука, 1967. – 444 с.
  3. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков – М. : Наука, 1968. – 559 с.
  4. Шамровский А. Д. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 111–115.
  5. Скрыпник И. А. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое / И. А. Скрыпник, А. Д. Шамровский // Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. – Запорожье, 1995. – С. 43–50.
  6. Шамровский А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский. – Запорожье, Изд-во ЗГИА, 1997 – 169 с.
  7. Шамровский А. Д. Решение уточненных уравнений. Пример внезапно приложенного на торце изгибающего момента / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Восточно-европейский журнал передовых технологий : Прикладная механика – 2011. – 3/7 (51). – С. 52–55.

Поступила в редакцию 02.02.2015

**Егарміна Л.Н. Еволюція переміщення під час розповсюдження нестационарних хвиль, що вигинають у балці на основі уточненої моделі**

*Показано розв'язки уточнених динамічних рівнянь згину балки на прикладі переміщення  $W$  [1]. Наведено графіки еволюції даного переміщення під час розповсюдження нестационарних хвиль у конструкції прямокутного перерізу під час її вигину. На відміну від відомих раніше рівнянь [2], швидкості розповсюдження фронтів повздовжніх та поперечних хвиль співпадають із швидкостями аналогічних хвиль у теорії пружності.*

**Ключові слова:** асимптотико-груповий аналіз, уточнені динамічні рівняння вигину балки, квазіфронт, переміщення, хвиля, що вигинає.

**Egarmina L. The evolution of displacement in a time of distribution of non-stationary flexural waves in a beam based on the improved model**

*The solutions of the improved dynamic equalizations of the beam bending on the example of displacement are shown [1]. The proper diagrams for this displacement in time of distribution of non-stationary waves in the bending beam with a rectangular cross-section are got. Unlike to the well-known equalizations [2], the speeds of the longitudinal and transversal waves fronts distribution coincide with analogical waves speeds in the elasticity theory.*

**Key words:** asymptotic-group analysis, specified dynamic equalizations of bend of bar, quasifront, displacement, flexural wave.