

УДК 539.371

А. Г. Попович, канд. техн. наук Н. В. Гончар, Д. Н. Степанов

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

## РАСЧЕТ СИЛЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО ВОЛОКНА ЧАШЕЧНОГО ЩЕТОЧНОГО ИНСТРУМЕНТА НА ДЕТАЛЬ

Составлены дифференциальные уравнения изогнутой оси упругого волокна чашечной механической щетки, которые могут описывать деформацию металлических проволочек или полимерно-абразивных волокон при обработке детали с плоской поверхностью. Изгиб упругого волокна, один конец которого зажат в ступице чашечной щетки, вызывается нормальной и касательной силами реакции, действующими со стороны детали на другой его конец, а также центробежным эффектом, обусловленным вращением щетки. Выведено уравнение для определения нормальной силы воздействия упругого волокна на деталь, а также формулы для определения его прогибов в окружном и радиальном направлениях.

**Ключевые слова:** чашечная механическая щетка, силы реакции детали, центробежные силы инерции, натяг, прогиб, уравнения изогнутой оси.

### Введение

В современной промышленности расширяется применение щеточных инструментов различных конструкций для обработки разных материалов. Волокна щеточных инструментов вращательного действия могут быть как металлическими, так и полимерными. Наиболее перспективными для финишно-отделочных операций с точки зрения качества и производительности являются полимерно-абразивные инструменты, относительно недавно появившиеся на рынке. Такие инструменты становятся особенно актуальными при обработке деталей, изготовленных из материалов, склонных к прижогам, силовое и тепловое воздействие на которые необходимо знать и контролировать.

В справочной научно-технической литературе представлено математическое описание процесса контакта упругого полимерно-абразивного волокна с обрабатываемой поверхностью для случая дискового щеточного инструмента [1, 2]. Однако сейчас широко распространяются чашечные (рис. 1) щеточные инструменты, о силовом воздействии которых на деталь информации в научных источниках недостаточно.



Рис. 1. Чашечный полимерно-абразивный инструмент [3]

Независимо от того, являются ли рабочие элементы чашечной щетки полимерно-абразивными волокнами или металлическими проволочками, далее в статье будем называть их упругими волокнами.

Для проведения обработки вращающийся чашечный щеточный инструмент подводит к поверхности детали на расстояние  $h$ , немного меньшее длины  $L$  недеформированных упругих волокон, создавая натяг  $i = L - h$ . Силовое воздействие щеточного инструмента на деталь складывается из элементарных сил воздействия отдельных упругих волокон на ее поверхность. При обработке плоской поверхности детали чашечным механическим щеточным инструментом все упругие волокна, отстоящие на одинаковом расстоянии  $r$  от оси вращения инструмента, деформируются одинаково.

Целью работы является определение силы воздействия упругого волокна чашечной механической щетки на поверхность обрабатываемой детали в зависимости от натяга, а также уравнений изогнутой оси упругого волокна.

### Содержание работы

Введем подвижную декартову систему координат, начало которой  $O$  совместим с местом заделки рассматриваемого упругого волокна в ступице чашечной щетки. Ось  $Oz$  направлена перпендикулярно к поверхности детали; ось  $Ox$  направлена по касательной к окружности, которую точка заделки упругого волокна описывает вокруг оси вращения щетки, а ось  $Oy$  направлена по радиусу этой окружности. В неинерциальной системе отсчета  $Oxyz$  упругое волокно находится в

равновесии под действием следующей системы нагрузок: нормальная ( $\overline{N}$ ) и касательная ( $\overline{F}_{mp}$ ) силы реакции со стороны поверхности детали; распределенные по длине волокна центробежные силы инерции; силы реакции жесткого защемления и моменты сил в жестком защемлении (рис. 2).

Задачу об определении уравнений изогнутой оси упругого волокна и сил реакций со стороны поверхности детали будем решать, считая, что отклонения  $x_k$  и  $y_k$  незашемленного конца  $K$  упругого волокна от оси  $Oz$  малы по сравнению с расстоянием  $r$  от точки защемления до оси вращения чашечной щетки.

Тогда можем считать, что центробежные силы инерции направлены параллельно оси  $Oy$  и распределены по упругому волокну с постоянной вдоль оси  $Oz$  интенсивностью  $q$ :

$$q = \rho \cdot S \cdot \omega^2 \cdot r, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала, из которого изготовлено упругое волокно;

$S$  – площадь его поперечного сечения;

$\omega$  – угловая скорость вращения щетки.

Кроме того, направление касательной силы реакции поверхности детали противоположно вектору скорости перемещения незашемленного конца упругого волокна относительно детали.

Значит, направление силы  $\overline{F}_{mp}$  составляет угол  $90^\circ$  с отрезком  $OK$  (который является перпендикуляром, проведенным из точки  $K$  на ось вращения чашечной щетки) и образует малый угол с осью  $Ox$ . Поэтому будем считать, что сила  $\overline{F}_{mp}$  направлена параллельно оси  $Ox$ .

С учетом сказанного, запишем выражения для изгибающих моментов ( $M_y$  и  $M_x$ ), действующих в поперечных сечениях упругого волокна, в плоскостях  $zOx$  и  $zOy$ :

$$M_y = N \cdot (x_k - w_x) + F_{mp} \cdot (h - z), \quad (2)$$

$$M_x = N \cdot (y_k - w_y) + \frac{1}{2} \cdot q \cdot (h - z)^2, \quad (3)$$

где  $w_x$  и  $w_y$  – прогибы упругого волокна в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно в сечении с координатой  $z$ .

Величины сил  $\overline{F}_{mp}$  и  $\overline{N}$  связаны соотношением  $F_{mp} = \mu \cdot N$ , в котором через  $\mu$  обозначен коэффициент пропорциональности между касательной и нормальной силами реакции поверхности детали, действующими на конец упругого волокна, т. е.  $\mu$  является аналогом коэффициента трения скольжения.

Дифференциальные уравнения изогнутой оси упругого волокна в случае, когда прогибы малы по сравнению с его длиной, углы поворота сечений (в радианах) малы по сравнению с единицей, а оси  $Ox$  и  $Oy$  являются главными центральными осями инерции для поперечного сечения упругого волокна, имеют вид [4]:

$$\frac{d^2 w_x}{dz^2} = \frac{M_y}{E \cdot I_y}, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 w_y}{dz^2} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}. \quad (5)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала, из которого изготовлено упругое волокно;

$I_x$  и  $I_y$  – моменты инерции поперечного сечения волокна относительно его главных центральных осей.

Изгибающие моменты считаем положительными, если они вызывают сжатие в верхних по оси  $Ox$  или  $Oy$  слоях материала упругого волокна.

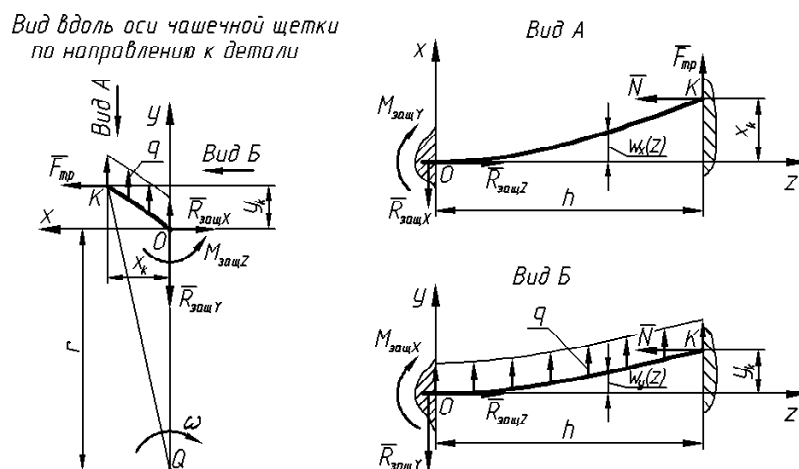


Рис. 2. Расчетная схема для составления дифференциальных уравнений изогнутой оси

Пусть металлические проволоочки или полимерно-абразивные волокна щетки имеют круглое поперечное сечение, тогда:

$$I_x = I_y = I = \frac{\pi \cdot d_0^4}{64}, \quad S = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4},$$

где  $d_0$  – диаметр упругого волокна.

Подставив (2) и (3) в (4) и (5) соответственно, после элементарных преобразований приведем дифференциальные уравнения изогнутой оси упругого волокна к виду:

$$\frac{d^2 w_x}{dz^2} + \frac{N}{E \cdot I} \cdot w_x = \frac{N \cdot (x_k + \mu \cdot h)}{E \cdot I} - \frac{\mu \cdot N}{E \cdot I} \cdot z, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_y}{dz^2} + \frac{N}{E \cdot I} \cdot w_y &= \frac{N \cdot y_k}{E \cdot I} + \frac{q \cdot h^2}{2 \cdot E \cdot I} - \\ &- \frac{q \cdot h}{E \cdot I} \cdot z + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot z^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) – линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (перед искомыми функциями  $w_x(z)$ ,  $w_y(z)$  и их производными). Правые части этих уравнений представляют собой степенные многочлены относительно независимой переменной  $z$ . Общее решение дифференциальных уравнений такого типа определяется известными из математического анализа методами [5]. Общее решение уравнений (6) и (7) имеет вид:

$$w_x(z) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) - \mu \cdot z + (x_k + \mu \cdot h), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} w_y(z) &= C_3 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) + C_4 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) + \\ &+ \frac{q}{2 \cdot N} \cdot z^2 - \frac{q \cdot h}{N} \cdot z + y_k + \frac{q \cdot h^2}{2 \cdot N} - \frac{q \cdot E \cdot I}{N^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Правые части (8) и (9) содержат семь неизвестных величин: постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ , координаты  $x_k$  и  $y_k$  незашемленного конца упругого волокна, сила  $N$ . Для их определения составляем следующие уравнения:

$$w_x|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{dw_x}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

$$w_y|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{dw_y}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad (11)$$

$$w_x|_{z=h} = x_k, \quad w_y|_{z=h} = y_k, \quad (12)$$

$$\int_0^h \sqrt{1 + \left(\frac{dw_x}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dw_y}{dz}\right)^2} dz = L_{деф}. \quad (13)$$

Уравнения (10) и (11) являются граничными условиями на зашемленном конце упругого волокна. Уравнения (12) выражают то, что изогнутая ось упругого волокна проходит через точку его контакта  $K$  с обрабатываемой поверхностью детали, имеющую координаты  $(x_k, y_k, h)$ . Левая часть уравнения (13) аналитически выражает длину деформированного упругого волокна.

Записав уравнения (10) и (11) в развернутом виде, выражаем из них постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  через значения  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $N$  и известные величины. Затем, подставив полученные выражения для  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  в (8) и (9), записываем в развернутом виде уравнения (12), из которых выражаем неизвестные  $x_k$  и  $y_k$  через  $N$  и известные величины:

$$x_k = \mu \cdot \left( \sqrt{\frac{E \cdot I}{N}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot h\right) - h \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} y_k &= -\frac{q \cdot E \cdot I}{N^2} + \frac{q \cdot h}{N} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{N}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot h\right) + \\ &+ \frac{q}{N} \cdot \left( \frac{E \cdot I}{N} - \frac{h^2}{2} \right) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot h\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь, когда  $x_k$ ,  $y_k$ , а значит и  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  выражены через  $N$  и известные величины, из (8) и (9) получаем уравнения изогнутой оси упругого волокна в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(z) &= \mu \cdot \left( -z + \sqrt{\frac{E \cdot I}{N}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{E \cdot I}{N}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot h\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right)\right) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} w_y(z) &= \frac{q}{2 \cdot N} \cdot z^2 - \frac{q \cdot h}{N} \cdot \left( z - \sqrt{\frac{E \cdot I}{N}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) \right) + \\ &+ \left( \frac{q \cdot h}{N} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{N}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot h\right) - \frac{q \cdot E \cdot I}{N^2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot h\right)} \right) \times \\ &\times \left( 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot z\right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Упростим уравнение (13), разложив подинтегральную функцию в его левой части в ряд Маклорена [5] и удержав только первые два члена:

$$\int_0^{L-i} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{dw_x}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{dw_y}{dz} \right)^2 \right) dz = L_{\text{деф}}, \text{ откуда}$$

$$L - i + \frac{1}{2} \cdot \int_0^h \left( \left( \frac{dw_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dw_y}{dz} \right)^2 \right) dz = L_{\text{деф}}. \quad (18)$$

Длина деформированного упругого волокна  $L_{\text{деф}}$  отличается от его длины в недеформированном состоянии на величину  $\Delta L$ , не превышающую  $\frac{N \cdot L}{E \cdot S}$ , которая пренебрежимо мала по сравнению со значением интеграла в левой части уравнения (18). Тогда, заменяя в (18)  $L_{\text{деф}}$  на  $L$ , получаем уравнение для определения нормальной силы реакции со стороны материала детали:

$$\int_0^h \left( \left( \frac{dw_x}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dw_y}{dz} \right)^2 \right) dz = 2 \cdot i, \quad (19)$$

в котором функции  $w_x(z)$  и  $w_y(z)$  выражаются согласно (16) и (17).

В качестве примера рассмотрим взаимодействие полимерно-абразивного волокна диаметром  $d_0 = 0,8$  мм и длиной  $L = 32$  мм с поверхностью детали; расстояние от точки заделки волокна до оси вращения чашечной щетки  $r = 25$  мм. Механические свойства материала полимерно-абразивного волокна:  $\rho = 2184$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2,5 \cdot 10^9$  Па; коэффициент  $\mu = 0,3$ . Параметры обработки: натяг  $i = 1,5$  мм; число оборотов механической щетки в минуту 2000 об/мин, т. е. ее угловая скорость  $\omega = 209,4$  рад/с.

Численно решая уравнение (19), найдем  $N = 0,0653$  Н, тогда  $F_{mp} = 0,0196$  Н. Далее по формулам (14) и (15) рассчитываем:  $x_k = 7,18$  мм,  $y_k = 4,97$  мм.

### Выводы

Таким образом, пользуясь выведенными уравнениями (16), (17) и (19), можно рассчитывать нормальную силу воздействия полимерно-абразивного волокна или металлической проволочки чашечной механической щетки на деталь в зависимости от режимов обработки, геометрических параметров упругого волокна и щетки, а также механических свойств его материала. Знание сил воздействия упругих волокон на деталь позволяет в дальнейшем рассчитать суммарную нормальную силу прижима чашечной механической щетки к детали и вращающий момент, которые нужно прикладывать к валу щетки для выполнения финишной обработки с требуемым натягом при заданном числе оборотов щетки в минуту.

### Список литературы

1. Абрашкевич Ю. Д. Полимерно-абразивные щеточные инструменты для обработки металлических и неметаллических поверхностей / Ю. Д. Абрашкевич, Л. Е. Пелевин, Г. Н. Мачишин // Нефть и газ Западной Сибири: матер. международной научно-технической конференции. Т. 2. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2013. – С. 8–14.
2. Попович А. Г. Расчет сил ударного воздействия эластичного волокна на деталь при финишной обработке / А. Г. Попович, Н. В. Гончар, Д. Н. Степанов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – №7 (Т. 94). – С. 11–14.
3. Osborn International: Каталог продукции / Osborn PRO, 2012. – 105 с.
4. Соппротивление материалов / [Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др.]; под ред. Г. С. Писаренка. – К.: Вища школа, 1979. – 696 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления Т. 2 / Пискунов Н. С. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

Поступила в редакцию 22.05.2014

**Попович О.Г., Гончар Н.В., Степанов Д.М. Розрахунок сили дії пружного волокна чашкового щіткового інструменту на деталь**

*Складено диференціальні рівняння зігнутої вісі пружного волокна чашкової механічної щітки, які можуть описувати деформацію металічних дротинок або полімерно-абразивних волокон під час обробки деталі з плоскою поверхнею. Згинання пружного волокна, один кінець якого зацемлено в маточині чашкової щітки, спричиняється нормальною і дотичною силами реакції, які діють з боку деталі на другий його кінець, а також відцентровим ефектом, обумовленим обертанням щітки. Виведено рівняння для визначення нормальної сили дії пружного волокна на деталь, а також формули для визначення його прогинів у коловому і радіальному напрямках.*

**Ключові слова:** чашкова механічна щітка, сили реакції деталі, відцентрові сили інерції, натяг, прогин, рівняння зігнутої вісі.

**Popovich A., Gonchar N., Stepanov D. Calculation of the force of cup brush instrument's elastic fiber action on a part**

*Differential equations of deflection curve of the cup mechanical brush's elastic fiber able to describe metallic wire or polymer-abrasive fiber deformation at treatment of the part with flat surface are worked out. Bending of the elastic fiber with one end fixed in a cup brush hub is caused by normal and tangential reaction forces acting from the part on the other fiber end and also by centrifugal effect conditioned on brush rotation. Equation for determination of the normal force of the elastic fiber action on the part as well as formulas for determination of the fiber deflections in circumferential and radial directions is deduced.*

**Key words:** cup mechanical brush, reaction forces of the part, centrifugal inertial forces, interference, bending deflection, deflection curve equations.