

УДК 621.135

М.Р. МУСТАФАЕВ, Ю.М. АШУРОВ, Р.С. АГАВЕРДИЕВ*Национальная Академия Авиации, Азербайджан***НОВЫЙ МЕТОД ПРОФИЛИРОВАНИЯ СЕЧЕНИЯ ЛОПАТОК
ТУРБИНЫ ЛЕМНИСКАТАМИ БЕРНУЛЛИ**

В статье приводится новый аналитический метод профилирования сечения лопаток турбины лемнисками Бернулли. Установлено, что для лемниската Бернулли $y_1/a, dy_1/dx_1, R_{кр}/a$ является лишь функцией x_1/a и, используя эту особенность, разработан новый метод, позволяющий легко и точно подобрать дугу лемниската, удовлетворяющую требованиям, предъявленным к профилю лопаток турбин. А также приводится аналитическая зависимость для определения минимальной ширины межлопаточного канала и вычислительным экспериментом установленная для лемнискаты Бернулли зависимость $dy_1/dx_1 = \operatorname{tg}(3\phi - 90)$, приводящая к простому способу построения нормали в полярных координатах. А также установлено, что с изменением начальной точки подобранные дуги лемниската можно изменить значение минимального размера межлопаточного канала.

Ключевые слова: профилирование, дозвуковые лопатки турбины, лемнискат Бернулли, кривизна.

Введение

Рабочая лопатка - одна из наиболее ответственных деталей газовой турбины. Она работает в условиях высоких температур и напряжений и должна удовлетворять ряду требований газовой динамики, прочности и технологии производства. Одним из важных критериев, позволяющих профилирование лопаток с высоким гидродинамическим качеством, является монотонное изменение кривизны (без скачков), от входной кромки к выходному контуру лопаток. Часто бывает удобным, в качестве такой линии использовать отрезок лемнискаты Бернулли. Как известно, одна четверть лемниската имеет монотонное изменение радиуса кривизны от минимального значения $R_{кр} = \sqrt{2}a/3$ в вершине лемнискаты до $R_{кр} = \infty$ в полюсе и сопрягается с прямой без разрыва второй производной. При этом, можно получить контур с максимальным углом кривизны, равным $3\pi/4$ [1-3].

Анализ использования в автоматизированном режиме лемнискаты Бернулли для этих целей позволил выявить ряд ее недостатков: сложность написания алгоритма программы в силу большого количества различных логических цепочек; отсутствие наглядности при реализации интерактивного режима. Поэтому разработка теоретически обоснованного и про-

стого в компьютерной реализации метода для решения данной задачи является актуальным.

Решение задачи. Произвольно расположенная одна четверть лемниската на прямоугольных координатах показана на рис.1, параметрическое уравнение которой имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \\ y = y_0 - x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

где x_0, y_0 - координаты полюса лемниската; a - полюсное расстояние лемниската; α - угол между полярной осью лемниската и осью абсцисс.

Расчет профиля производится в прямоугольных координатах, как показано на рис. 2. Там же, приведены основные геометрические характеристики проектируемой решетки, которые служат исходными данными для расчета наружных обводов профиля, за исключением угла $\omega_1 = f(C_m)$, заранее не известного (вместо C_m может быть задана площадь профиля $F_{пл}$). Размер «горло» определяется по выбранному

эффективному углу $d = t \sin \beta_{2\phi}$, где $t = \pi D/z$ (z -число лопаток проектируемого колеса; D -диаметр рассчитываемого сечения).

На рис. 3 показана схема разбиения контура профиля с обозначением характерных точек, используемых при расчете, и кривых, привлекаемых для описания соответствующих участков. Уравнение кривой лемниската, при $\alpha=0$, имеет вид [1]:

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 - 2a^2(x_1^2 - y_1^2) = 0, \quad a > 0 \quad (2)$$

или

$$\frac{y_1}{a} = \sqrt{1 + 4\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2} \quad (3)$$

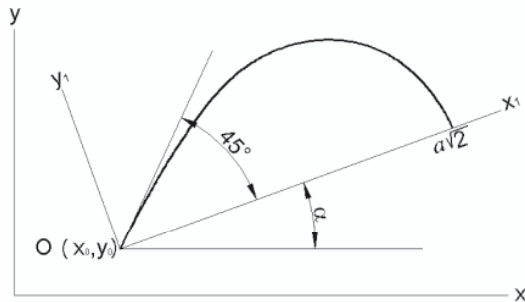


Рис. 1. Изображение лемнискаты в прямоугольной системе координат

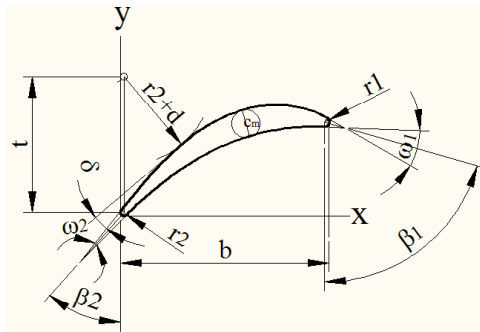


Рис. 2. Расположение проектируемого профиля в прямоугольной системе координат:

b - ширина решетки; t - шаг решетки; d - размер минимального проходного сечения (горла) межлопаточного канала; C_m - максимальная толщина профиля; r_1 - радиус округления входной кромки; r_2 - радиус округления выходной кромки; ω_1 - угол заострения входной кромки; ω_2 - угол заострения выходной кромки; δ - угол отгиба

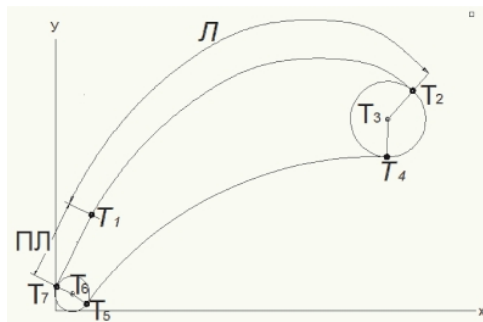


Рис. 3. Характерные точки на профиле и обозначение кривых, описывающих его участки:

T_1 - точка сопряжения прямой (ПЛ) с лемнискатой Л; T_2 - точка сопряжения Л с окружностью входной кромки; T_3 - центр окружности входной кромки; T_4 - точка касания корыта и окружности входной кромки; T_5 - точка касания корыта и окружности выходной кромки; T_6 - центр окружности выходной кромки; T_7 - точка касания линии спинки с окружностью выходной кромки

Из уравнения (2) имеем,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1}{a} \frac{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1}}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2}}, \quad (4)$$

$$R_{кр} = \frac{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right)^{3/2}},$$

или

$$\frac{R_{кр}}{a} = \frac{1}{1,5 \sqrt{1 + 4\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1}} \quad (5)$$

Как видно из (3), (4) и (5) y_1/a , dy_1/dx_1 , $R_{кр}/a$ является лишь функцией x_1/a и, используя эту особенность, нами разработан новый метод, позволяющий легко и точно подобрать дугу лемнискаты, удовлетворяющую заданное условие [5].

Рассмотрим задачу описания спинки одной лемнискатой, при заданном значении b , t , r_1 , r_2 , β_1 , β_2 , ω_1 , ω_2 . Как видно из рис. 3, расчетная система координат привязана к выходной кромке и ось y параллельна фронту решетки. В качестве исходных данных, для определения параметра лемнискаты, можно использовать направление касательных в двух точках профиля, если известны координаты одной из этих точек и расстояния между этими точками по оси x . По условию задачи $ПЛ=0$ и соответственно. Определим координаты характерных точек T_6 , T_7 и T_2 и соответственно значения

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_{T1}}, \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_{T2}} :$$

$$x_{T6} = y_{T6} = r_2,$$

$$x_{T7} = r_2 [1 - \cos(\beta_2 - \omega_2 / 2)],$$

$$y_{T7} = r_2 [1 + \sin(\beta_2 - \omega_2 / 2)] \quad (6)$$

$$x_{T2} = b - r_1 [1 - \cos(\beta_1 - \omega_1 / 2)],$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_{T1}} = \operatorname{tg}(90 - \beta_2 + \omega_2 / 2),$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_{T2}} = \operatorname{tg}(90 + \beta_1 - \omega_1 / 2).$$

Для решения поставленной задачи удобно применить AutoCAD, позволяющий с высокой точностью производить вычислительные работы и графическое построение. Для реализации этих задач нами предлагается следующий алгоритм:

1. Выбирать значение $(x_1/a)_0 \geq 0$ и из уравнения (4) определить значение $\arctg(dy_1/dx_1)_{(x_1/a)_0}$ (первоначально удобно начать $(x_1/a)_0 = 0$);

2. Вычислить значение α по формуле

$$\alpha = 90^\circ - \beta_2 + 0.5\omega_2 - \arctg(dy_1/dx_1)_{(x_1/a)_0};$$

3. Вычислить значение

$$\arctg(dy_1/dx_1)_{(x_1/a)_1} = \arctg(dy_1/dx_1)_{(x_1/a)_0} - [180 - (\beta_1 + \beta_2) + (\omega_1 + \omega_2) / 2]$$

и определить значение $(x_1/a)_1$ из уравнения (4), соответствующее значению $\arctg(dy_1/dx_1)_{(x_1/a)_1}$ (это наглядно иллюстрируется графиком, представленным на рис. 4.);

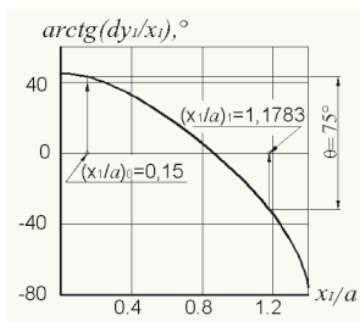


Рис. 4. Расчет с использованием графика

Вычислить значения k_x по формуле

$$k_x = (x_1/a)_1 - (x_1/a)_0;$$

4. Вычислить значения k_y по формуле

$$k_y = (y_1 - y_0)/a = \sqrt{1 + 4\left(\frac{x_1}{a}\right)^2} - 1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \sqrt{1 + 4\left(\frac{x_0}{a}\right)^2} - 1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2};$$

5. Вычислить значения

$$x_{T7} = r_2 [1 - \cos(\beta_2 - \omega_2 / 2)],$$

$$x_{T2} = b - r_1 [1 - \cos(\beta_1 - \omega_1 / 2)];$$

6. Вычислить значение a , по формуле

$$a = (x_{T2} - x_{T7}) / (k_x \cos \alpha + k_y \sin \alpha);$$

7. Определить значения координат x_0 и y_0 полюса лемниската по формуле

$$\begin{cases} x_0 = x_{T7} - (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha), \\ y_0 = y_{T7} - (-x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha). \end{cases}$$

$$\text{где } x_1 = (x_1/a)_0 a, \quad y_1 = a \sqrt{1 + 4\left(\frac{x_1}{a}\right)^2} - 1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2}$$

8. Строить дугу лемниската по соответствующему значению a в интервале

$(x_1/a)_0 a \leq x \leq (x_1/a)_1 a$ по формуле

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha, \\ y = y_0 - x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

9. Проверить размер горла межлопаточного канала и угла отгиба задней кромки.

10. Если полученная кривая не обеспечит отмеченных условий, меняя значение $(x_1/a)_0$ (если условия задачи позволяют) повторить процесс вычисления, начиная из пункта 2.

В рис. 4 наглядно иллюстрируется пример расчета с использованием графика $\arctg(dy_1/dx_1) = f(x_1/a)$, при $\theta = 75^\circ$. Принимая значения $(x_1/a)_0 = 0,15$ из графика определяется значение $\arctg(dy_1/dx_1) = 43,1^\circ$ и $(x_1/a)_1 = 1,1783$ ($43,1 - 75 = -31,9^\circ$).

Соответственно $k_x = 1,02831$, $k_y = 0,267506$.

Далее необходимо определить значения x_{T2} и x_{T7} . При значении

$$b = 30 \text{ мм}, r_1 = 0,7 \text{ мм}, r_2 = 0,5 \text{ мм}, \beta_1 = 74^\circ, \beta_2 = 42^\circ,$$

$$\omega_1 = 16^\circ, \omega_2 = 6^\circ, x_{T2} = 29,5847 \text{ мм},$$

$x_{T8} = 0,11143 \text{ мм}$, $\alpha = 7,9^\circ$ и соответственно

$$a = 30,0183 \text{ мм}.$$

Далее определяется минимальная ширина (горло) межлопаточного канала и, меняя значения $(x_1/a)_0$, добывается его заданное значение. Анализ показывает, что с уменьшением значения $(x_1/a)_0$, значение минимального размера межлопаточного канала (горло) d уменьшается. Поэтому, первоначально определяется значе-

ние минимального размер межлопаточного канала (горло) d при $(x_1/a)_0 = 0$. Если полученное значение больше чем заданное значение $d_{зад}$, это означает, что при заданной комбинации исходных данных, профиль не может быть реализован, т.е. изменением значения $(x_1/a)_0$ невозможно добиться заданного значения размера минимальной ширины межлопаточного канала (в этом случае спинка может описываться с помощью отрезков прямых и лемнискат, сопрягаемых без разрыва первой и второй производных). Если, при $(x_1/a)_0 = 0$, значение d меньше чем $d_{зад}$, необходимо определить значения $(x_1/a)_0$ соответствующий значению $d_{зад}$. Для этого необходимо определить при трех значениях $(x_1/a)_0 = 0, (x_1/a)_1, (x_1/a)_2$ значение размера горла (d_0, d_1, d_2), и вычислить значение $(x_1/a)_0$, соответствующее значению $d_{зад}$ по формуле:

$$(x_1/a) = \left(c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2(d_0 - d_{зад})} \right) / 2c_2,$$

где $c_1 = \frac{[(b_1 - b_0)(x_1/a)_2^2 - (b_2 - b_0)(x_1/a)_1^2]}{[(x_1/a)_1(x_1/a)_2^2 - (x_1/a)_2(x_1/a)_1^2]},$

$$c_2 = \frac{[(b_2 - b_0)(x_1/a)_1 - (b_1 - b_0)(x_1/a)_2]}{[(x_1/a)_1(x_1/a)_2^2 - (x_1/a)_2(x_1/a)_1^2]}.$$

Для определения минимальной ширины (горло) d межлопаточного канала в [5, 6] применен графический метод. Однако, хотя этот метод применим для любой кривой, он требует большой затраты машинного времени. Поэтому, в данной работе применен аналитический метод, который повышает скорость и надежность работы программы и увеличивает точность. Определение минимальной ширины межлопаточного канала сводится к определению минимального расстояния от точки до кривой. Как известно из дифференциальной геометрии, уравнение нормали для кривых в точке (x_1, y_1) имеет вид [4].

$$y = y_1 - (x - x_1) / y_1', \quad (7)$$

где $y_1' = y'(x_1)$.

Для решения этой задачи удобно использовать уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах.

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\phi \text{ или } \rho = a\sqrt{2 \cos 2\phi} \text{ (рис. 5).}$$

Вычислительным экспериментом установлено что для лемнискаты Бернулли $y_1' = \operatorname{tg}(3\phi - 90)$

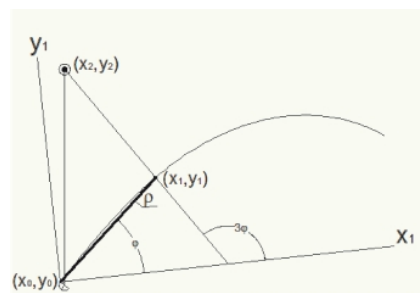


Рис. 5. Схема для ввода расчетного уравнения для определения минимальной ширины межлопаточного канала

Подставив значение y_1' , $x_1 = \rho \cos \phi$, $y_1 = \rho \sin \phi$ в (7) получим

$$y = \frac{a\sqrt{2 \cos 2\phi} \sin \phi (x - a\sqrt{2 \cos 2\phi} \cos \phi)}{\operatorname{tg}(3\phi - 90)}. \quad (8)$$

Задавая значения $x = x_2, y = y_2$ определяется значение ϕ , соответственно x_1, y_1 и расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Для решения уравнения (8) удобен итерационный метод.

Если не достигнуто заданное значение d и δ , спинку можно описать с помощью отрезков прямых и лемнискат, сопрягаемых без разрыва первой и второй производных. В этом случае координаты точки сопряжения прямой (ПЛ) с лемнискатой Л-Т₁ определяются по формуле:

$$\begin{cases} x_{Т1} = x_{Т7} + I_{ПЛ} \cos(90 - \beta_2 + \omega_2 / 2) \\ y_{Т1} = y_{Т7} + I_{ПЛ} \sin(90 - \beta_2 + \omega_2 / 2) \end{cases}, \quad (9)$$

где $I_{ПЛ}$ - длина прямой.

Заменив значения $x_{Т7}$ и $y_{Т7}$ на значения $x_{Т1}$ и $y_{Т1}$, параметры лемниската можно определить вышеотмеченным алгоритмом. При этом, принимая $(x_1/a)_0 = 0$ и изменив значение длины отрезка, можно добиться заданного значения.

Расчет вогнутой поверхности профиля (корыта).

Получив кривую для спинки, удовлетворяющую заданным величинам горла межлопаточного канала и угла отгиба задней кромки, можно переходить к построению корыта.

Для описания корыта с удовлетворительным протеканием кривизны использован полином 3-й степени. При определении коэффициентов, используются значения функций и их первых производных в концах кривых.

Определение площади профиля.

Соединив спинки и корыта с окружностью входной и выходной кромки, получим замкнутый контур, который, с помощью AutoCAD, легко можно преобразовать «region» и исполь-

зуя команды «massprop» точно определить все геометрические характеристики, в том числе площадь, координаты центра тяжести и др.

Далее проверяется максимальная толщина профиля. Методика определения которого подробно изложена в [5]. Меняя значение ω_1 добивается заданное значение C_m .

Кроме контроля геометрических характеристик профиля, проверяется канал, образуемый двумя соседними профилями решетки. Канал считается удовлетворительным, если он плавно сужается от входа в решетку к выходу из нее. Для этого, необходимо знать параметры окружностей, вписанных в межлопаточный канал. Методика определения параметров окружностей, вписанных в межлопаточный канал, подробно изложена в [5].

На рис. 6 показан профиль, построенный предложенной методикой. (Пример основан на предположительных исходных данных и поэтому имеет чисто методическое значение).

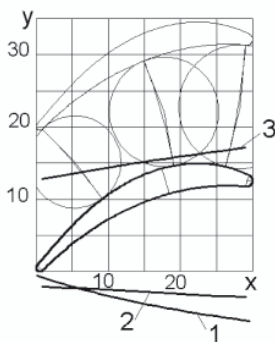


Рис. 6. Профиль, образованный лемнискатами:
1, 2 - изменение радиусов кривизны спинки и корыта,
3 - изменение размера межлопаточного канала

Заключение

Таким образом, предложенный теоретически обоснованный новый метод, позволяет определить параметры лемниската, удовлетворяющие требованиям, предъявляемым к профилю лопаток турбины, и мог быть использован для профилирования до звуковых решеток и оптимизации их параметров.

Литература

1. Копелев С.З. Расчет турбин авиационных двигателей. (Газодинамический расчет. Профилирование лопаток). М., «Машиностроение», 1974, 268 с.
2. Копелев С.З. Охлаждаемые лопатки газовых турбин (тепловой расчет и профилирование) М.: «Наука», 1983, 148 с.
3. Деревянко А.В., Копелев С. З. Аналитическое профилирование турбинных лопаток. Теплоэнергетика, 1982, №3, с.63.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. «Наука», 1981, 720 с.
5. Мустафаев М.Р., Абдуллаев П. Ш., Ашуров Ю.М. Профилирование сечения лопаток турбины на основе решения уравнения кривизны. Авиационно-космическая техника и технология, 2010, № 4/71, с.95-101.
6. Мустафаев М.Р., Садыхов Р.А, Самедов А.С., Ашуров Ю.М. Новый метод профилирования сечения лопаток турбины лемнискатами Бернулли. Ученые записки НАА, т 12, № 4/1, 2010, с.14-23.

Поступила в редакцию 10.06.2015

М.Р. Мустафаев, Ю.М. Ашуров, Р.С. Агавердиев. Новый метод профилювання перерізу лопаток турбіни лемніскатами Бернуллі

У статті приводиться новий аналітичний метод профилювання перерізу лопаток турбіни лемніскатами Бернуллі. Отримано аналітичну залежність для критерію подоби кривих лемніскасти і з їх допомогою визначено параметри кривих, що задовольняють вимогам, пред'явленим до профілю лопаток турбін. А також приводиться аналітична залежність для визначення мінімальної ширини міжлопаткового каналу і обчислювальним експериментом встановлено для лемніскасти Бернуллі залежність, що приводить до простого способу побудови нормалі.

Ключові слова: профилювання, дозвукові лопатки турбіни, лемніскасти Бернуллі, кривизна.

M.R.Mustafaev, Y.M.Ashurov, R.S.Aghaverdiyev. New method of grading of the back of the blades turbine bernoulli lemniscates

The article presents a new analytical method for profiling section of turbine blades by Bernoulli lemniscates. Obtained the analytical dependence for the similarity criterion curves lemniscate and by using it to determine the parameters of curves satisfying the requirements imposed on the profile of turbine blades. Also provides analytical dependence for determination of the minimum width of the inter-blade channel and computational experiments set for lemniscate Bernoulli relationship leading to a simple method of constructing normal.

Keywords: profiling, subsonic turbine blades, Bernoulli lemniscate curvature.