УДК 531

Д-р техн. наук О. Д. Шамровський[1], Є. М. Богданова[2]

[1]Запорізька державна інженерна академія, [2]Запорізький національний технічний університет; м. Запоріжжя

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Робота присвячена вивченню можливості застосування методу послідовних переміщень для розв'язання контактних задач теорії пружності, зокрема задачі про штамп. Розглядається розв'язання нелінійних задач для пружних стрижневих конструкцій на основі даного методу.

Ключові слова: *стержнева модель, суцільне середовище, метод послідовних переміщень.*

Вступ

Раніше [1] була розроблена стрижнева модель суцільного середовища для розв'язання пласких статичних задач теорії пружності, а також запропонована дискретна модель елемента кінцевих розмірів, який був успішно використаний для розв'язання класичних задач механіки деформівного твердого тіла. У роботі Н. І. Мусхелішвілі наводиться повне об´рунтування розв'язань контактних задач [2]. Також аналітичне рішення наводиться Галіним [3]. Дана робота базується на ідеї моделювання суцільного середовища системою пружних стрижнів, які деформуються разом [4]. Для проведення розрахунків по даній моделі пропонується використовувати метод послідовних переміщень [5]. Особливості даного методу дозволяють застосовувати його і при розв'язанні контактних задач теорії пружності.

Постановка задачі

Розв'язується змішана гранична задача статики пружного тіла. А саме, знаходиться пружна рівновага тіла, якщо задані зміщення частини точок його поверхні. Фізично це відповідає випадку, коли зусиллями, прикладеними до точок поверхні, цим точкам передаються задані переміщення і закріплюють поверхню в цьому вигляді.

Розглядається випадок одного штампа з прямолінійною підставою, паралельною осі Ох, причому цей штамп може переміщуватися лише вертикально (рис. 1). Відрізок границі, що стикається зі штампом, ми будемо вважати симетричним щодо осі Оу. Штамп вдавлюється в пружну кінцеву область Щ, невідомою силою, перпендикулярної до границі Г. Передбачається, що тертя настільки велике, що ковзання не може мати місця. Розглянута задача полягає у знаходженні зусиль, прикладених до області Щ на границі Г, при відомому векторі зсувів (х, у) точок цієї області, а також знаходженні переміщення всіх інших точок тіла.

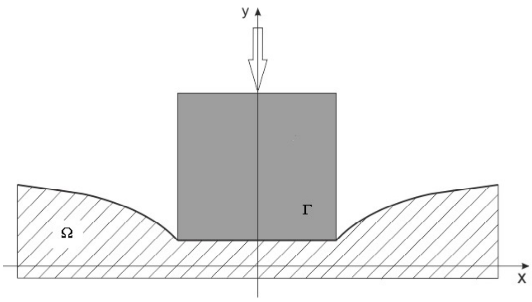

Рис. 1. Штамп з прямолінійною підставою

Метод розв'язання

Маємо стрижневу систему, яка моделює певне суцільне середовище з самого початку заданими переміщеннями вузлів в граничному діапазоні (рис. 2). Ці початкові переміщення викликані прикладеним до тіла навантаженням, в зоні контакту є деформація. Для розрахунку використовується метод послідовних переміщень [3]. Відмінністю розв'язуваних контактних задач теорії пружності є те, що для деяких точок поверхні задаються зусилля, а для інших переміщення. Метод послідовних переміщень цілком придатний для таких змішаних задач. Під штампом задаються переміщення вузлів, а для інших вузлів поверхні – зусилля (нульові). Розроблено алгоритм і програму для розв'язання відповідних задач.

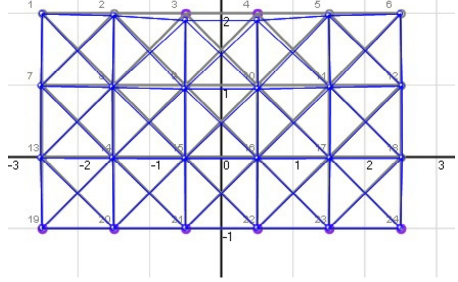

Рис. 2. Стрижнева модель суцільного середовища

Розглядається стрижнева система, в якій деякі вузли в граничному діапазоні мають початкові переміщення і вважаються закріпленими. А також закріплені вузли нижньої межі тіла. Всі інші вузли вважаються рухливими, їх переміщення необхідно знайти для знаходження рівноваги системи в цілому і зусиль, прикладених до тіла.

І тут важливо відзначити, що для розв'язання даної задачі на першому кроці координати зміщених вузлів беремо ті, які були в моделі до навантаження, тобто до зсуву. Тому що розв'язується задача, зворотня тим, розв'язання яких запропоновані в попередніх роботах [2–4].

Початкові координати вузлів будуть:

$$(x_i, y_i), \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{1}$$

Маючи зазначені координати, можна заздалегідь обчислити для всіх стрижнів їх початкові довжини. На початкові вузли діють сили з проекціями на осі координат Pxk, Pyk. Уздовж стрижнів діють їх реакції Rik, спрямовані від вузла k, що відповідає розтягнутим стиржням. Якщо в системі є стислі стрижні, то відповідні реакції від'ємні.

Введемо позначення:

$$S_{kx} = P_{xk} - \sum_{i=1}^{n} R_{ik} \cos\alpha_{ik}, \quad S_{ky} = P_{yk} - \sum_{i=1}^{n} R_{ik} \sin\alpha_{ik}. \tag{2}$$

У положенні рівноваги системи величини S_{kx} і S_{ky} повинні бути рівні нулю; проте на першому кроці, вони завідомо не дорівнюють нулю, а в подальшому, при правильно побудованій процедурі, до нуля наближаються.

Таким чином, отримуємо формулу для розрахунку сили:

$$P_{xk} = \sum_{i=1}^{n} R_{ik} \cos\alpha_{ik}, \quad P_{yk} = \sum_{i=1}^{n} R_{ik} \sin\alpha_{ik}, \tag{3}$$

де

$$\cos\alpha_{ik} = \frac{x_i - x_k}{L_{ik}}; \quad \sin\alpha_{ik} = \frac{y_i - y_k}{L_{ik}}. \tag{4}$$

Позначимо малі переміщення вузла k під дією сил P_{kx}, P_{ky} через u_k, v_k. Тоді для деформацій стрижнів, що сходяться у вузлі k, маємо:

$$\Delta_{ik} = -u_k \cos\alpha_{ik} - v_k \sin\alpha_{ik}. \tag{5}$$

Всі стрижні вважаються пружними; зв'язок між реакціями стрижнів і їх деформаціями (подовженнями) має вигляд:

$$R_{ik} = D_{ik}\Delta_{ik} \quad (i = 1\,..\,n). \tag{6}$$

Жорсткості стрижнів обчислюються за формулами:

$$D_{ik} = \frac{E_{ik} S_{ik}}{L_{ik}} \quad (i = 1\,..\,n). \tag{7}$$

Тут E_{ik} – модуль пружності; S_{ik} – площа поперечного перерізу; L_{ik} – довжина i-го стрижня.

На довільному кроці будуємо лінійні рівняння:

$$a_{11}u_k + a_{12}v_k = S_{kx}, \; a_{21}u_k + a_{22}v_k = S_{ky}, \tag{8}$$

де

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{n} D_{ik} \cos^2\alpha_{ik}; \; a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^{n} D_{ik} \sin\alpha_{ik} \cos\alpha_{ik}; \\ a_{22} = \sum_{i=1}^{n} D_{ik} \sin^2\alpha_{ik} \tag{9}$$

і розв'язуємо їх:

$$u_k = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad v_k = \frac{\Delta_v}{\Delta}. \tag{10}$$

При знайдених на певному кроці процедури переміщеннях вузла k маємо рекурентну формулу для обчислення нових координат вузла:

$$x_k \to x_k + u_k, \; y_k \to y_k + v_k. \tag{11}$$

А також накопичуємо значення сили

$$P_{xk} \to P_{xk}, P_{yk} \to P_{yk}. \tag{12}$$

Далі переходимо до наступного вузла і повторюємо процедуру. Умовою її припинення буде:

$$\sqrt{S_{kx}^2 + S_{ky}^2} \le \varepsilon\sqrt{P_{xk}^2 + P_{yk}^2}, \tag{13}$$

де ε – задана відносна похибка.

Аналіз отриманих результатів

Застосування даного методу дозволяє знаходити сили, що викликали задані переміщення, а також переміщення всіх вузлів системи, що задовольняють рівноваги системи в цілому.

Для дослідження поведінки системи будемо поступово збільшувати задане початкове зміщення від 0,1 до 0,5 при незмінних параметрах самої системи, що демонструється на рис. 3–11.

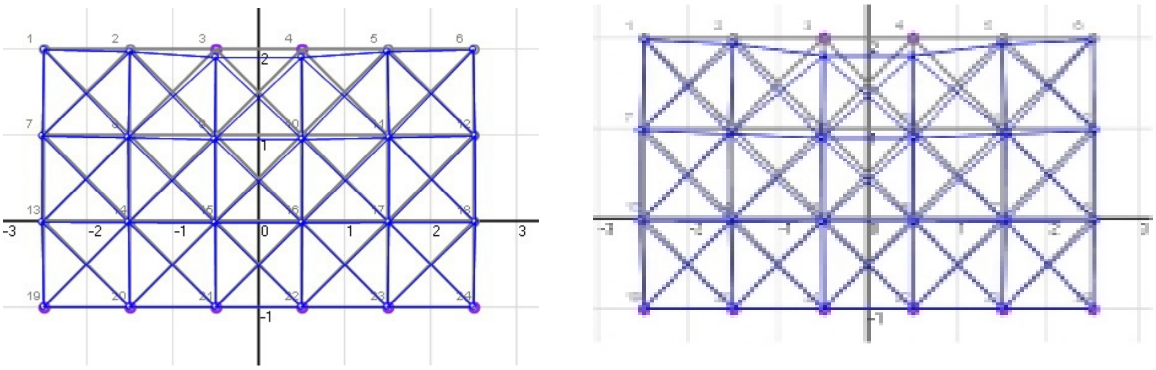

Рис. 3, 4. Дискретна модель 5х3 елемента для переміщень 0,1 і 0,2

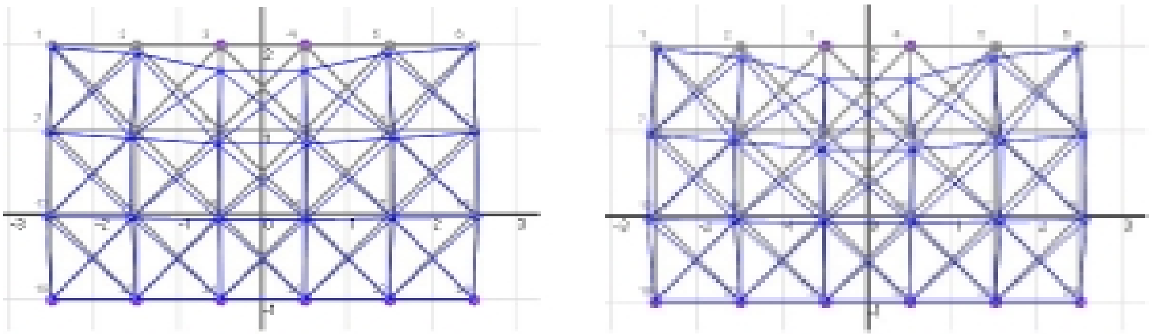

Рис. 5, 6. Дискретна модель 5х3 елемента для переміщень 0,3 і 0,4

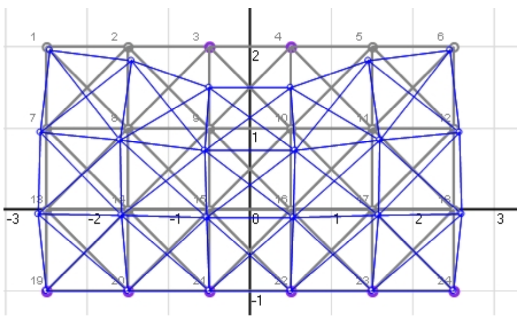

Рис. 7. Дискретна модель 5х3 елемента для переміщення 0,5

Проводимо подальше розбиття, робимо розмір дискретного елемента 0,5 і порівнюємо отримані результати.

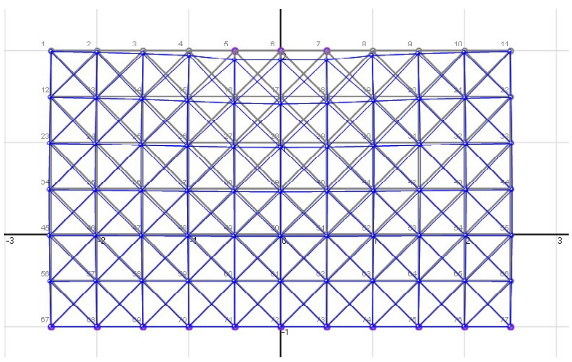

Рис. 8. Дискретна модель 10х6 елементів розміру 0,5 для переміщення 0,1

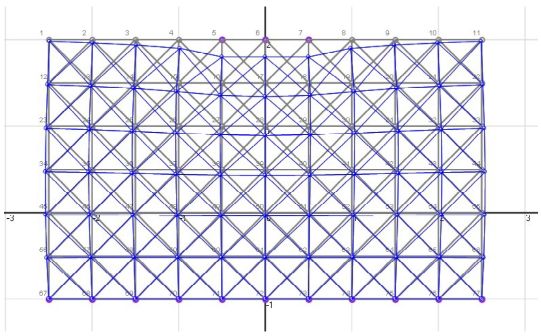

Рис. 9. Дискретна модель 10х6 елементів розміру 0,5 для переміщення 0,2

Знову зменшуємо розмір дискретного елемента вдвічі, новий розмір дискретного елемента 0,25.

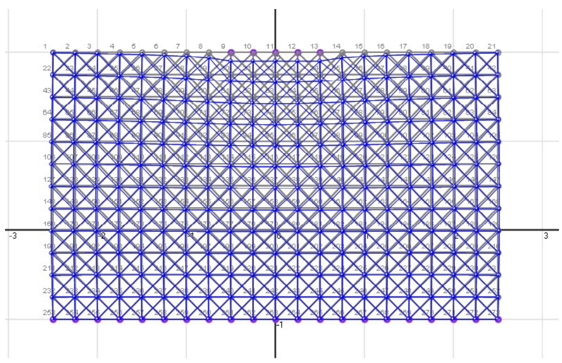

Рис. 10. Дискретна модель 20х12 елементів розміру 0,25 для переміщення 0,1

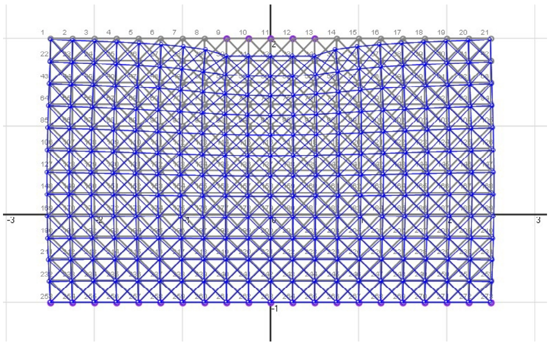

Рис. 11. Дискретна модель 20x12 елементів розміру 0,25 для переміщення 0,2

Як видно з рисунків, подальше розбиття не має сенсу, так як результати, отримані за допомогою даних моделей, не мають істотних відмінностей.

Всі отримані значення сил, а також сумарні значення, заносимо в таблицю 1.

Використовуючи чисельні значення сили, будуємо графіки залежності сили від переміщення для запропонованих моделей (рис. 12).

Як бачимо, чисельно значення сили для даних моделей не дуже відрізняються. А отже, і немає потреби в подальшій дискретизації.

Висновки

Розроблено стрижневу модель суцільного середовища для розв'язання контактних задач теорії пружності. Запропонована дискретна модель для розв'язання задачі про штамп з прямолінійною підставою. Для проведення розрахунків з дискретної моделі пропонується використовувати метод послідовних переміщень, що добре зарекомендував себе для розрахунку стрижневих конструкцій.

Таблиця 1 – Переміщення та сила, що їх викликає, для моделей 5x3, 10x6 і 20x12

0,05			0,1			0,15			0,2		
5x3	10x6	20x12	5x3	10x6	20x12	5x3	10x6	20x12	5x3	10x6	20x12
0,036	0,024	0,017	0,072	0,047	0,032	0,106	0,070	0,047	0,140	0,091	0,061
0,036	0,017	0,011	0,072	0,034	0,02	0,106	0,050	0,029	0,140	0,066	0,039
0,073	0,024	0,010	0,143	0,047	0,018	0,212	0,069	0,027	0,279	0,091	0,035
	0,066	0,011		0,129	0,02		0,189	0,029		0,248	0,039
		0,017			0,032			0,047			0,06
		0,065			0,123			0,179			0,233

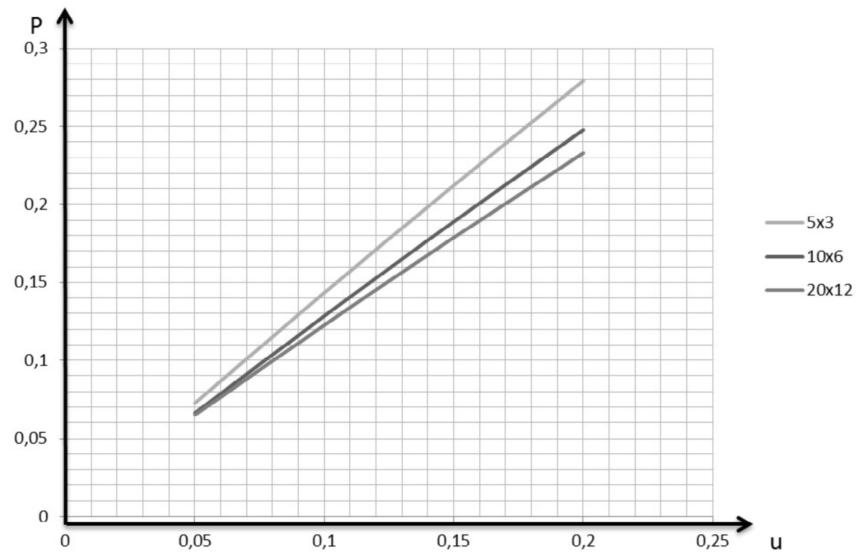

Рис. 12. Залежність між силою і переміщенням, що нею викликається для моделей 5x3, 10x6 і 20x12

Список літератури

1. Дискретные модели для плоских статических задач теории упругости / [А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник, и др.] // Восточно-Европейский журнал передовых технологий //научный журнал. – Харьков : Технологический центр, 2011. – № 3/7 (51). – С. 11–18.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 709 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР : учеб. / под ред. Галина Л. А. – М. : Наука, 1976. – 493 с.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие для вузов / Ю. Н. Работнов. – 2-е изд., испр. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
5. Шамровский А. Д. Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем / О. Д. Шамровський, А. І. Безверхий, В. В. Кривуляк // Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні. – 2008. – № 2. – С. 110 –118.

Поступила в редакцию 16.05.2016

Шамровский А.Д., Богданова Е.Н. Метод последовательных перемещений для решения контактных задач теории упругости

Работа посвящена изучению возможности применения метода последовательных перемещений для решения контактных задач теории упругости, в частности, задачи о штампе. Рассматривается решение нелинейных задач для упругих стержневых конструкций на основе данного метода.

Ключевые слова: *стержневая модель, сплошная среда, метод последовательных перемещений.*

Shamrovskiy A., Bogdanova E. Method of successive movements for solution of contact problems of theory of elasticity

The work is devoted to studying the possibility of using the method of successive movements for solving contact problems of elasticity theory, in particular the problem of the stamp. We consider the solution of nonlinear problems for elastic rod designs based on this method.

Key words: *beam model, solid medium, method of successive movements.*